

Problema 1

La teoria della relatività generale predice che l'intervallo infinitesimo tra due eventi che avvengono nel campo gravitazionale statico a simmetria sferica generato da una massa M sia esprimibile mediante la formula

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_M}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_M}{r}},$$

dove $r_M = \frac{2GM}{c^2}$, e si sono adottate coordinate polari sferiche per la descrizione delle coordinate spaziali.

1) Si considerino due orologi fermi a distanze differenti dal centro di attrazione e si confrontino i loro tempi propri con il tempo t del riferimento.

2) Quale relazione ne consegue per le misure di frequenza di uno stesso fotone osservato in prossimità di ciascuno dei due orologi?

3) Dopo aver sviluppato il risultato al primo ordine non banale nelle potenze di $1/c^2$, si interpreti l'espressione così ottenuta in termini di conservazione dell'energia.

4) Si considerino ora due orologi situati alla stessa distanza dal centro di attrazione, e si assuma che uno di essi sia fermo mentre l'altro si muove di moto circolare uniforme intorno al centro. Che relazione intercorre tra i loro tempi propri? In quale limite questa relazione è compatibile con la corrispondente predizione ricavabile dalla teoria della relatività ristretta?

Problema 2

Due fotoni di frequenze ν_1 e ν_2 e vettori d'onda \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 possono collidere producendo due nuovi fotoni di frequenze ν'_1 e ν'_2 .

1) Determinare le frequenze finali in funzione dei dati e della variabile θ' che rappresenta l'angolo tra i fotoni prodotti.

2) Supponendo che i fotoni in questione appartengano a due pacchetti di onde elettromagnetiche monocromatiche che entrano in collisione, si avrà una distribuzione di luce diffusa in tutte le direzioni. Quali saranno la massima e la minima frequenza della radiazione diffusa?

3) In quali direzioni si troveranno rispettivamente la massima e la minima frequenza?

4) Quale sarà in generale la forma della distribuzione in energia della radiazione diffusa?