

Problema

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una superficie descritta dall'equazione $z = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2) + bxy$, dove a e b sono parametri soggetti al vincolo $a > b > 0$, ed è soggetto all'azione di una forza gravitazionale che produce un'accelerazione g nella direzione negativa dell'asse z .

1) Scrivere la Lagrangiana del punto materiale in termini delle coordinate generalizzate x e y .

2) In regime di piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio scrivere la Lagrangiana approssimata e determinare le frequenze proprie.

3) Identificare i modi normali e riscrivere la Lagrangiana per le piccole oscillazioni in funzione dei modi normali.

4) Sempre nel caso di piccole oscillazioni, scrivere l'Hamiltoniana sia usando le coordinate x e y che usando i modi normali, e determinare la trasformazione canonica che connette le due Hamiltoniane così ottenute.