FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2004/2005

Venerdì 17 Dicembre 2004 - ore 15

Problema 1

Un sistema è costituito da due corpi uguali di massa m e da un terzo corpo di massa M. I tre corpi sono tutti vincolati a muoversi su una stessa circonferenza di raggio R e uniti l'uno all'altro da molle di uguale costante K. Le due molle che congiungono le masse m alla massa M sono tra loro uguali e hanno lunghezza a riposo l; la molla che congiunge le due masse uguali ha lunghezza a riposo L. Le tre molle sono anch'esse disposte lungo la circonferenza e la somma delle loro lunghezze a riposo soddisfa la relazione $2l + L = 2\pi R$.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare le frequenze proprie.

Calcolare i rapporti tra le frequenze proprie nel caso limite $M = m$.

Problema 2

Data l'Hamiltoniana $H = A\,p\,q^2$, dove A è una costante arbitraria, scrivere e risolvere esplicitamente le equazioni canoniche con le condizioni iniziali $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.

Verificare, sostituendo in H il valore delle soluzioni, che l'Hamiltoniana è un integrale primo del sistema.

Ricavare la Lagrangiana.

Problema 3

Considerare la classe di trasformazioni di coordinate descritta dalle relazioni

$$Q = a\sqrt{\frac{q}{p}}, \qquad\qquad P = b\sqrt{p^3 q}.$$

Determinare le relazioni che devono intercorrere tra i parametri a e b se si vuole che le trasformazioni indicate siano canoniche.

Calcolare esplicitamente le funzioni generatrici $F_3(Q, p)$ ed $F_4(p, P)$.