FISICA a IV - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Primo appello - Sessione estiva
Venerdì 22 Giugno 2007 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

Per il gas perfetto monoatomico l'espressione della funzione di partizione canonica è

$$Q = \frac{1}{N!\,h^N} \int \prod_{i=1}^{N} dp_i\, dq_i\, e^{-\frac{p^2}{2mkT}} = \frac{L^N}{N!\,h^N} (2\pi mkT)^{\frac{N}{2}}.$$

Dal logaritmo di Q, usando la formula di Stirling, è immediato ricavare F:

$$F(N, L, T) = -NkT\left[1 + \ln(\frac{L}{N}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{2\pi mkT}{h^2})\right].$$

Il potenziale chimico si ottiene a sua volta dalla relazione

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -kT\left[\ln\frac{L}{N} + \frac{1}{2}\ln(\frac{2\pi mkT}{h^2})\right].$$

La pressione è data da

$$p = -\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{NkT}{L},$$

per cui l'equazione di stato è semplicemente

$$pL = NkT$$

Problema A.2

Poichè l'Hamiltoniana di una particella carica vale

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + qEx$$

la distribuzione spaziale della densità di particelle è semplicemente

$$n(x) = n_0\, e^{-\frac{x}{\xi}},$$

dove abbiamo definito $\xi = \frac{kT}{qE}$ e n_0 si ricava dalla condizione di normalizzazione

$$\int n(x)\, dx = \frac{N}{A}.$$

Integrando tra 0 e L si ricava quindi

$$n_0 = \frac{N}{A\xi} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{L}{\xi}})}.$$

Integrando negli intervalli $(0, L/2)$ e $(L/2, L)$ è poi immediato ricavare

$$N_+ = \frac{1}{1+C}, \qquad N_- = \frac{C}{1+C},$$

dove abbiamo definito $C = e^{-\frac{L}{2\xi}}$.

La pressione si ricava dalla relazione $p(x) = n(x)kT$, che implica banalmente

$$p(0) = \frac{NqE}{A} \frac{1}{1 - C^2},$$

$$p(L/2) = \frac{NqE}{A} \frac{C}{1 - C^2},$$

$$p(L) = \frac{NqE}{A} \frac{C^2}{1 - C^2},$$

Problema B.1

L'effetto Doppler derivante da un'emissione che appare ortogonale alla direzione del moto nel riferimento dell'osservatore implica la relazione $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Al primo ordine non banale vale quindi

$$\omega \approx \omega_0 \, (1 + < \frac{v^2}{2\, c^2} >),$$

e ricordando che il valore medio di v^2 in un moto termico unidimensionale è esattamente kT si ottiene subito

$$< \omega > = \omega_0 \, (1 + \frac{kT}{2\, mc^2}).$$

Problema B.2

Si tratta di calcolare la quantità $\wp = \frac{1}{h^2} \int d^2p d^2q$ sotto l'ipotesi che

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m + \frac{1}{2} m\omega^2 \, \mathbf{q}^2 = E.}$$

Basta cambiare variabili a

$$x_1 = \frac{p_1}{\sqrt{2m}}, \qquad x_2 = \frac{p_2}{\sqrt{2m}},$$

$$x_3 = q_1 \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}, \qquad\qquad x_4 = q_2 \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}.$$

Risulta allora

$$\wp = \frac{4}{h^2 \omega^2} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

soggetto alla condizione $\sum_i x_i^2 = E$.

Usando la formula per il volume dell'ipersfera in quattro dimensioni si ottiene subito

$$\wp = \frac{1}{2} \Big(\frac{2\,\pi\, E}{h\,\omega} \Big)^2.$$

Dalla distribuzione canonica per N oscillatori bidimensionali si ricava facilmente che il calore specifico vale $C_v = 2\,Nk$, risultato che si poteva anche ottenere dal teorema di equipartizione, che ci assicura che $< H >= 2\,NkT$.

Dalla relazione che lega le fluttuazioni dell'energia al calore specifico

$$< H^2 > - < H >^2 = C_v k T^2$$

è quindi immediato ricavare

$$\frac{< H^2 >}{< H >^2} = 1 + \frac{2Nk\, kT^2}{(2NkT)^2} = 1 + \frac{1}{2N}.$$