

FISICA a IV - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Secondo appello - Sessione estiva
Venerdì 20 Luglio 2007 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A

a) Poichè l'Hamiltoniana di una particella carica vale

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \pm qEx$$

la distribuzione spaziale della densità di particelle è semplicemente

$$n_{\pm}(x) = n_0 e^{\mp \frac{q}{\xi} x},$$

dove abbiamo definito $\xi = \frac{kT}{qE}$ e n_0 si ricava dalla condizione di normalizzazione

$$\int_{-L}^L n_{\pm}(x) dx = \frac{N}{A}.$$

Integrando si ricava quindi

$$n_0 = \frac{N}{A\xi} \frac{1}{2 \sinh \frac{L}{\xi}} = \left(\frac{N}{2AL} \right) \frac{\alpha}{\sinh \alpha},$$

dove abbiamo introdotto per comodità di notazione la combinazione adimensionale

$$\alpha \equiv \frac{L}{\xi} \equiv \frac{qEL}{kT}.$$

Integrando negli intervalli $(-L, 0)$ e $(0, L)$ è poi immediato ricavare le frazioni di particelle (cariche positivamente) contenute nelle due regioni corrispondenti a $x < 0$ e $x > 0$:

$$N_- = N \frac{K}{1+K}, \quad N_+ = N \frac{1}{1+K},$$

dove abbiamo definito $K = e^{\alpha}$.

Le frazioni di cariche negative si ottengono semplicemente dallo scambio di quelle appena calcolate, per cui complessivamente si ha lo stesso numero totale di particelle in ciascuna delle due regioni, come prevedibile per la simmetria del problema.

b) La densità totale delle particelle in funzione della posizione si ottiene dalla somma delle densità parziali già calcolate, e risulta quindi

$$n(x) = n_+(x) + n_-(x) = \frac{N}{A\xi} \frac{\cosh \frac{x}{\xi}}{\sinh \frac{L}{\xi}} = \left(\frac{N}{AL} \right) \frac{\alpha}{\sinh \alpha} \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right).$$

La distribuzione è simmetrica rispetto all'origine, e nel limite $\alpha \rightarrow 0$ (alte temperature) la densità tende a essere uniforme, come prevedibile.

c) Le pressioni parziali si ricavano dalla relazione $p_{\pm}(x) = n_{\pm}(x)kT$, che implica banalmente per la pressione totale (somma delle pressioni parziali) $p(x) = n(x)kT$.

Sulle pareti risulta quindi

$$p(L) = p(-L) = \frac{N kT}{A L} \frac{\alpha \cosh \alpha}{\sinh \alpha} = \frac{N qE}{A} \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha}.$$

d) La densità di carica è data dal prodotto della carica per la densità di particelle, e vale quindi

$$\rho(x) = q n_+(x) - q n_-(x) = \frac{q N}{A \xi} \frac{\sinh \frac{x}{\xi}}{\sinh \frac{L}{\xi}} = \left(\frac{q N}{A L} \right) \frac{\alpha}{\sinh \alpha} \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right).$$

Problema B

a) Nell'approssimazione di campo medio che abbiamo adottato l'Hamiltoniana totale è la somma delle Hamiltoniane delle singole particelle:

$$H = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{a}{N_0} \frac{n}{V} \right) = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - a \frac{n^2}{V},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $N/N_0 \equiv n$.

Di conseguenza, detta U l'energia interna totale, vale la relazione

$$\sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} = U + a \frac{n^2}{V},$$

e ciò rende possibile il calcolo diretto del peso statistico mediante integrazione sulle coordinate e i momenti di singola particella in analogia con la procedura adottata nel caso di particelle non interagenti (gas perfetto).

Nell'effettuare l'integrazione sulle coordinate dobbiamo soltanto ricordare che il volume disponibile per ciascuna particella si riduce a $V - nb$.

Risulta quindi immediatamente, applicando le relazioni già note per il gas perfetto monoatomico

$$S = k N \left\{ \ln\left(\frac{V - nb}{N}\right) \left[\frac{4\pi m}{3h^2 N} \left(U + a \frac{n^2}{V} \right) \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} \right\}.$$

Se nell'espressione precedente eliminiamo N in favore di n e trascuriamo alcune costanti (indicate con K) inessenziali per i calcoli successivi otteniamo

$$S = n R \left\{ \ln\left(\frac{V}{n} - b\right) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{U}{n} + a \frac{n}{V}\right) + K \right\}.$$

b) L'estensività si verifica notando che l'espressione ottenuta per l'entropia, a parte un fattore moltiplicativo n che esprime appunto l'estensività, dipende soltanto dalle combinazioni $\frac{V}{n}$ e $\frac{U}{n}$ (oltre che ovviamente dalle costanti a e b).

c) Le relazioni termodinamiche che ci interessano sono

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{3}{2} \frac{nR}{U + a\frac{n^2}{V}},$$

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{nR}{V - nb} - \frac{3}{2} a \frac{n^2}{V^2} \frac{nR}{U + a\frac{n^2}{V}}.$$

Introducendo il calore specifico molare $c_V = \frac{3}{2}R$ e sostituendo possiamo riscrivere i risultati precedenti nella forma

$$U = n c_V T - a \frac{n^2}{V}, \quad p = \frac{n R T}{V - n b} - a \frac{n^2}{V^2}.$$

d) Dal risultato precedente è immediato ricavare

$$(p + a \frac{n^2}{V^2})(V - n b) = n R T,$$

che è l'equazione di stato dei gas di van der Waals.