

FISICA a IV - Prova scritta - A.A. 2006/2007

Primo appello - Sessione autunnale

Venerdì 7 Settembre 2007 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A

a) Dal primo principio della termodinamica discende $dQ = dU + dW$, ma in questo caso vale $dU = -M dH - H dM$ e $dW = M dH$, e pertanto

$$dQ = -H dM.$$

b) Poiché vale $dQ = T dS$, nel caso specifico risulta $dS = -\frac{H}{T} dM$, da cui facendo uso dell'equazione di stato $\frac{H}{T} = \frac{M}{C}$ si ottiene

$$dS = -\frac{M}{C} dM.$$

Quest'equazione può essere facilmente integrata ricavando

$$S = S_0 - \frac{M^2}{2C} = S_0 - \frac{C H^2}{2T^2}.$$

c) L'energia libera si ottiene dalla relazione $F = U - T S$ notando che vale

$$U = -M H = -\frac{C H^2}{T},$$

per cui risulta

$$F(T, H) = -\frac{C H^2}{2T} - T S_0.$$

d) Dal calcolo risulta subito:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{C H^2}{2T^2} - S_0 = -S,$$

$$\frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{C H}{T} = -M.$$

Problema B

a) Nell'approssimazione di campo medio che abbiamo adottato l'Hamiltoniana totale è la somma delle Hamiltoniane delle singole particelle:

$$H = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{a}{N_0} \frac{n}{V} \right) = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - a \frac{n^2}{V},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $N/N_0 \equiv n$.

Il calcolo della funzione di partizione canonica si effettua integrando l'espressione

$$Q_N = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N d\mathbf{p}_i d\mathbf{q}_i e^{-\beta H}$$

su tutti i momenti e le coordinate di singola particella in analogia con la procedura adottata nel caso di particelle non interagenti (gas perfetto).

Nell'effettuare l'integrazione sulle coordinate dobbiamo soltanto ricordare che il volume disponibile per ciascuna particella si riduce a $V - nb$.

Risulta quindi immediatamente, applicando le relazioni già note per il gas perfetto monoatomico

$$F(N, V, T) = -kT \ln Q_N = -N kT \ln\left(\frac{V - nb}{N}\right) - N kT \ln\left(\frac{2\pi m kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} - N kT - a \frac{n^2}{V}.$$

Se nell'espressione precedente eliminiamo N in favore di n e definiamo la costante

$$C = \ln N_0 - 1 - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2\pi m k}{h^2}\right)$$

che sarà inessenziale per i calcoli successivi otteniamo

$$F(n, T, V) = -n R T \ln\left(\frac{V}{n} - b\right) - \frac{3}{2} n R T \ln T + n R T C - a \frac{n^2}{V}.$$

b) È immediato verificare che vale $F(n, T, V) = n f(T, V/n)$, dove

$$f(T, v) = -R T \ln(v - b) - \frac{3}{2} R T \ln T + R T C - \frac{a}{v}.$$

c) Le relazioni termodinamiche che ci interessano sono

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = n R \ln\left(\frac{V}{n} - b\right) + \frac{3}{2} n R (\ln T + 1) - n R C,$$

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{n R T}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2}.$$

Dalla relazione $U = F + T S$ segue poi subito

$$U = \frac{3}{2} n R T - a \frac{n^2}{V}.$$

d) Dal risultato precedente è immediato ricavare

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = n R T,$$

che è l'equazione di stato dei gas di van der Waals.