FISICA a IV - Prova in itinere - A.A. 2006/2007
Giovedì 29 Marzo 2007 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Per i gas di van der Waals valgono le relazioni

$$U = n\,C_V T - a\frac{n^2}{V}, \qquad p = \frac{n\,R\,T}{V - n\,b} - a\frac{n^2}{V^2}.$$

Si può quindi calcolare l'entropia dalla relazione

$$d\,S = \frac{d\,U}{T} + p\frac{d\,V}{T} = n\,C_V\frac{d\,T}{T} + \frac{n\,R}{V - n\,b}d\,V,$$

che implica, a meno di costanti d'integrazione

$$S = n\,C_V \ln T + n\,R\,\ln(V - n\,b).$$

L'equazione per una trasformazione adiabatica reversibile (isoentropica) di un gas di van der Waals è pertanto

$$T^{C_V}(V - n\,b)^R = costante.$$

Di conseguenza la relazione che intercorre tra i valori iniziali e finali di V e T è:

$$\frac{T_2}{T_1} = \Big(\frac{V_1 - n\,b}{V_2 - n\,b}\Big)^{R/C_V}.$$

2) Il lavoro compiuto sull'adiabatica reversibile si ottiene dalla relazione $d\,U + d\,W = 0$, per cui vale

$$W = n\,C_V(T_1 - T_2) + a\,n^2\Big(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\Big),$$

dove i valori di V e T sono legati tra loro dalla relazione stabilita in precedenza.

Problema 2

1) Possiamo ricavare N dalla relazione

$$N = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \frac{1}{k}C\,V\,T^{\frac{5}{2}}e^{\frac{\mu}{kT}},$$

da cui è immediato ricavare

$$\mu = k\,T\,\ln\frac{N\,k}{C\,V\,T^{\frac{5}{2}}}.$$

2) Dalla relazione che lega $p\,V$ al granpotenziale, utilizzando l'espressione ricavata per il potenziale chimico, otteniamo

$$p\,V = C\,V\,T^{\frac{7}{2}}\left(\frac{k\,N\,T^{-\frac{5}{2}}}{C\,V}\right) = N\,k\,T,$$

che è l'equazione di stato dei gas perfetti.

3) Per ricavare il potenziale di Gibbs ricordiamo che $G = N\,\mu$ e che G è funzione di p, T e N. Sostituendo si ricava quindi

$$G = N\,k\,T\,\ln\frac{p}{C\,T^{\frac{7}{2}}}.$$

Problema 3

1) La distribuzione in presenza di energia potenziale gravitazionale è proporzionale alla funzione

$$exp(-\frac{mv^2}{2\,kT} + \frac{GMm}{r\,kT}),$$

con un fattore di normalizzazione che ai fini del problema non è necessario calcolare.

2) Il campo è approssimabile con il suo valore alla superficie quando la scala della distribuzione spaziale $\frac{GMm}{kT}$ è molto minore del raggio R della massa M. Infatti ponendo $r = R + h$ vale

$$\frac{GMm}{r\,kT} \approx \frac{GMm}{R\,kT} - \frac{mgh}{kT},$$

dove abbiamo posto $\frac{GM}{R^2} \equiv g$.

La scala di h è quindi $\frac{kT}{mg} \equiv \frac{kTR^2}{GMm}$, e la condizione per la validità dell'approssimazione è pertanto $\frac{kTR^2}{GMm} << R$, ovvero

$$kT << \frac{GMm}{R} \equiv mgR.$$

3) Nel caso in esame vale semplicemente, grazie alle proprietà delle distribuzioni esponenziali

$$< h >= \frac{kT}{mg}.$$