FISICA a IV - Prova in itinere - A.A. 2000/2010
Giovedì 3 Giugno 2010 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Poiché la Lagrangiana è invariante per riparametrazioni conviene partire dalla espressione della lagrangiana per la particella libera, funzione della sola velocità $\mathbf{v}_0$, effettuando la sostituzione $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \omega \wedge \mathbf{r}$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità nel riferimento che ruota con velocità angolare ω.

Risulta quindi per il singolo atomo $L = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} + \omega \wedge \mathbf{r})^2$, da cui possiamo ricavare:

$$\mathbf{p} = m(\mathbf{v} + \omega \wedge \mathbf{r}), \qquad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \omega \wedge \mathbf{r}.$$

Risulta quindi nelle variabili del riferimento ruotante:

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} - (\omega \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}.$$

2) Ai fini del problema conviene riscrivere l'Hamiltoniana nella forma

$$H = \frac{1}{2\,m} (\mathbf{p} - m\,\omega \wedge \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2} m (\omega \wedge \mathbf{r})^2.$$

L'integrazione sullo spazio delle fasi di singola particella si riduce quindi al calcolo di:

$$\frac{1}{h^3} \int d^3\mathbf{p}\, e^{-\frac{\beta}{2m}(\mathbf{p} - m\,\omega \wedge \mathbf{r})^2} \int d^3\mathbf{r}\, e^{\frac{1}{2}\beta m (\omega \wedge \mathbf{r})^2}.$$

L'integrale sui momenti, passando alle variabili $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\,\omega \wedge \mathbf{r}$, si riduce al caso della particella libera, mentre l'integrale sulle coordinate si effettua più facilmente passando a coordinate cilindriche r, θ, z e ottenendo

$$\int d^3\mathbf{r}\, e^{\frac{1}{2}\beta m (\omega \wedge \mathbf{r})^2} = \pi\, L \int_0^{R^2} dr^2\, e^{\frac{1}{2}\beta m \omega^2 r^2} = \frac{2\pi L}{\beta m \omega^2} \big(e^{\frac{1}{2}\beta m \omega^2 R^2} - 1 \big).$$

Risulta quindi in conclusione per la funzione di partizione canonica

$$Z = \frac{1}{N!} \Big[\Big(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \Big)^{\frac{3}{2}} \Big(\frac{2\pi L}{\beta m \omega^2} \Big) \Big(e^{\frac{1}{2}\beta m \omega^2 R^2} - 1 \Big) \Big]^N.$$

3) La densità locale del gas si ottiene restringendo l'integrazione alle sole variabili di momento. Poiché abbiamo già calcolato la normazizzazione possiamo ottenere immediatamente

$$\rho(r) = N \frac{e^{\frac{1}{2}\beta m \omega^2 r^2}}{\pi L \int_0^{R^2} dr^2\, e^{\frac{1}{2}\beta m \omega^2 r^2}} = \frac{N}{L} \frac{\beta m \omega^2}{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}\beta m \omega^2 r^2}}{e^{\frac{1}{2}\beta m \omega^2 R^2} - 1}.$$

Si noti che nel limite $\omega \to 0$ si ottiene correttamente $\rho(r) \to \frac{N}{\pi R^2 L} \equiv \frac{N}{V}$.

Problema 2

1) La relazione meccanica che lega la densità al potenziale gravitazionale si ottiene notando che il campo gravitazionale $g(r)$ si ricava dal potenziale grazie alla relazione $g(r) = -\frac{dV}{dr}$, ma è legato alla massa $M(r)$ contenuta all'interno della sfera di raggio r dalla relazione $g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2}$, dove G è la costante di gravitazione universale e quindi

$$M(r) = \int 4\pi r^2 dr\, \rho(r) = \frac{r^2}{G}\frac{dV}{dr},$$

da cui derivando rispetto a r si ricava subito

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\Big(\frac{r^2}{G}\frac{dV}{dr}\Big).$$

La relazione statistica che lega la densità al potenziale è invece, sulla base della distribuzione di Boltzmann

$$\rho(r) = A\, e^{-\beta m V(r)},$$

dove A è una normalizzazione da determinarsi dinamicamente.

Pertanto l'equazione che deve essere soddisfatta da $V(r)$ è

$$\frac{1}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\Big(\frac{r^2}{G}\frac{dV}{dr}\Big) = A\, e^{-\beta m V(r)}.$$

2) Assumendo $V(r) = C\,\ln r$ si ricava per sostituzione nell'equazione

$$\frac{C}{4\pi G r^2} = A\, e^{-\beta m C\, ln r} = A\, r^{-\beta m C}.$$

L'equazione è soddisfatta soltanto se vale $\beta m C = 2$, e risulta quindi

$$C = \frac{2}{\beta m}.$$

3) Risulta quindi in conclusione

$$\rho(r) = \frac{kT}{2\pi G m r^2}, \qquad\qquad M(r) = \frac{2kT}{Gm} r,$$

e si noti che non vi sono singolarità fisiche all'origine, e che la densità deve aumentare al crescere di T, perché l'attrazione gravitazionale deve compensare la crescita dell'energia cinetica impedendo la fuga degli atomi.