

SOLUZIONI

Problema

L'espressione della densità di energia si ottiene, in analogia con il caso tridimensionale, ma tenendo conto che l'integrazione nello spazio degli impulsi d -dimensionale avviene mediante il passaggio a coordinate polari e l'integrazione sull'angolo solido tramite la formula

$$d^d k = S_d k^{d-1} dk,$$

e valgono le relazioni $k = \omega/c$, $E = \hbar\omega$ e $\beta = 1/kT$. Risulta pertanto, assumendo che anche in d dimensioni gli stati di polarizzazione siano soltanto due:

$$u(T, \omega) = \frac{2 S_d}{(2 \pi c)^d} \frac{\hbar \omega^d}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}.$$

La condizione di massimo per l'espressione precedente si ottiene derivando rispetto a ω e può essere posta nella forma

$$\frac{\hbar \omega}{k T} = d (1 - e^{-\beta \hbar \omega}).$$

2) Il limite di alte frequenze corrisponde alla condizione $\beta \hbar \omega \gg 1$ e vale quindi

$$u(T, \omega) \approx \frac{2 S_d}{(2 \pi c)^d} \hbar \omega^d e^{-\beta \hbar \omega}.$$

Il limite di basse frequenze corrisponde invece alla condizione $\beta \hbar \omega \ll 1$ e vale quindi

$$u(T, \omega) \approx \frac{2 S_d}{(2 \pi c)^d} k T \omega^{d-1}.$$

3) Il calcolo dell'energia libera può essere effettuato utilizzando la distribuzione canonica. La procedura è del tutto analoga a quella adottata nel caso tridimensionale, con l'avvertenza di utilizzare l'opportuna generalizzazione dello spazio delle fasi. Il risultato che si ottiene è

$$F(T, V) = -\frac{2}{d} V \frac{S_d K_d}{(2 \pi c \hbar)^d} (k T)^{d+1}.$$

4) L'energia interna si può ottenere dal risultato precedente per l'energia libera, ricavando mediante derivazione l'entropia e applicando la relazione $U = F + T S$, oppure direttamente integrando l'espressione per la densità d'energia. Il risultato è

$$U(T, V) = 2 V \frac{S_d K_d}{(2 \pi c \hbar)^d} (k T)^{d+1}.$$

5) Derivando l'energia libera rispetto al volume si ottiene

$$p(T, V) = \frac{2}{d} \frac{S_d K_d}{(2\pi c \hbar)^d} (kT)^{d+1}.$$

6) Dal confronto dei risultati precedenti si ottiene immediatamente

$$U = dpV,$$

mentre dal teorema di equipartizione è immediato ricavare la relazione valida per il gas perfetto monoatomico in d dimensioni

$$U = \frac{d}{2} pV,$$