FISICA b II - Prova in itinere - A.A. 2007/2008
Martedì 1 Aprile 2008 - ore 15

SOLUZIONI

Problema - prima parte

1) Per campi elettromagnetici della forma assegnata è facile calcolare l'effetto dei principali operatori differenziali. In particolare

$$\mathit{rot}\,\mathbf{E} = [i\,k\,\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \mathbf{E}_0 + \mathit{rot}\,\mathbf{E}_0]\,e^{ikz-i\omega t},$$

e un'espressione analoga si ottiene per $\mathit{rot}\,\mathbf{B}$.

Di conseguenza le equazioni di Maxwell nel vuoto che coivolgono l'operatore rot prendono la forma

$$i\,k\,\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \mathbf{E}_0(x,y) = \frac{i}{c}\omega\,\mathbf{B}_0(x,y) - \mathit{rot}\,\mathbf{E}_0,$$

$$i\,k\,\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \mathbf{B}_0(x,y) = -\frac{i}{c}\omega\,\mathbf{E}_0(x,y) - \mathit{rot}\,\mathbf{B}_0.$$

Se poi notiamo che $\mathit{rot}\,\mathbf{E}_0$ e $\mathit{rot}\,\mathbf{B}_0$ hanno solo componenti lungo la direzione z mentre $\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \mathbf{E}_0$ e $\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \mathbf{B}_0$ giacciono sul piano (xy) ne segue subito che deve essere

$$\mathit{rot}\,\mathbf{E}_0 = 0, \qquad\qquad \mathit{rot}\,\mathbf{B}_0 = 0,$$

e anche

$$\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \mathbf{E}_0(x,y) = \frac{\omega}{c\,k}\mathbf{B}_0(x,y),$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x \wedge \mathbf{B}_0(x,y) = -\frac{\omega}{c\,k}\mathbf{E}_0(x,y),$$

e la consistenza di queste equazioni implica immediatamente

$$\frac{\omega^2}{c^2k^2} = 1,$$

da cui $k = \omega/c$.

$\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ sono quindi tra loro perpendicolari, e i loro moduli sono legati dalla relazione $|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{B}_0|$.

2) Le restanti equazioni di Maxwell $\mathit{div}\,\mathbf{E} = 0$ e $\mathit{div}\,\mathbf{B} = 0$ si traducono immediatamente, a partire dalle condizioni date, nelle relazioni

$$\mathit{div}\,\mathbf{E}_0 = 0, \qquad\qquad \mathit{div}\,\mathbf{B}_0 = 0,$$

che unite alle precedenti già dimostrate implicano immediatamente che i campi $\mathbf{E}_0(x,y)$ e $\mathbf{B}_0(x,y)$, devono soddisfare rispettivamente le equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica nel vuoto.

Problema - seconda parte

1) Poiché $\mathbf{E}_0(x,y)$ soddisfa le equazioni dell'elettrostatica il campo elettrico deve essere lo stesso che quello tra due superficie cilindriche coassiali di carica opposta. Pertanto le linee di forza di $\mathbf{E}_0(x,y)$ sono radiali. Per le proprietà già determinate di $\mathbf{B}_0(x,y)$ le linee di forza di $\mathbf{B}_0(x,y)$ devono quindi essere cerchi concentrici intorno all'asse del cilindro. Si noti che le condizioni a contorno sono automaticamente soddisfatte da questa configurazione.

Facendo ora uso delle leggi di Gauss e di Ampere risulta rispettivamente

$$2\,\pi\,r\,|\mathbf{E}_0| = 4\,\pi\,\lambda, \qquad\qquad 2\,\pi\,r\,|\mathbf{B}_0| = \frac{4\,\pi}{c} I,$$

da cui subito

$$\mathbf{E}_0 = \frac{2\,\lambda}{r}\hat{\mathbf{e}}_r, \qquad\qquad \mathbf{B}_0 = \frac{2\,I}{c\,r}\hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

2) Ricordando le relazioni precedenti ne segue immediatamente

$$I = c\,\lambda$$