FISICA b II - Prova in itinere - A.A. 2007/2008

Mercoledì 28 maggio 2008 - ore 15

SOLUZIONI

Problema

1) Scriviamo l'equazione del moto per l'oscillatore forzato:

$$m\,\ddot{\mathbf{x}} + m\,\omega_0^2\,\mathbf{x} + m\,\gamma\,\dot{\mathbf{x}} = e\,\mathbf{E}(t),$$

che in componenti di Fourier diventa

$$\mathbf{x}_\omega = \frac{e}{m}\frac{\mathbf{E}_\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma},$$

e possiamo mettere in evidenza la direzione della polarizzazione $\hat{\epsilon}$ scrivendo $\mathbf{E}_\omega = \hat{\epsilon}\,E_\omega$.

Calcoliamo ora l'energia assorbita tramite la relazione

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{dW}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot e\,\mathbf{E}(t) = e\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, i\omega\,\mathbf{x}(\omega)\cdot\mathbf{E}(-\omega) =$$

$$= \frac{e^2}{m}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, i\omega\frac{\mathbf{E}(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \frac{e^2}{m}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,|E(\omega)|^2\frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

Calcoliamo poi il momento angolare assorbito tramite la relazione

$$\Delta\mathbf{J} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\mathbf{x}(t)\wedge e\,\mathbf{E}(t) = e\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\mathbf{x}(\omega)\wedge\mathbf{E}(-\omega) =$$

$$= \frac{e^2}{m}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\frac{\mathbf{E}(\omega)\wedge\mathbf{E}^*(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \frac{e^2}{m}\epsilon\wedge\epsilon^*\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,|E(\omega)|^2\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2 + i\omega\gamma}.$$

Nel caso di polarizzazione circolare vale $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 \pm i\,\epsilon_2)$ e risulta quindi

$$\epsilon\wedge\epsilon^* = \mp i\,\mathbf{n},$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore della direzione di propagazione dell'onda, da cui

$$\Delta\mathbf{J} = \mp\hat{\mathbf{n}}\frac{e^2}{m}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,|E(\omega)|^2\frac{\omega\,\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

2) Dal confronto tra gli integrandi nelle relazioni ottenute per ΔW e $\Delta\mathbf{J}$ risulta subito, per polarizzazioni circolari

$$\Delta\mathbf{J}_\omega = \mp\hat{\mathbf{n}}\frac{\Delta W_\omega}{\omega}.$$

3) Supponendo che $\Delta W_\omega = \hbar\,\omega$ ne segue

$$\Delta\mathbf{J}_\omega = \mp\hat{\mathbf{n}}\,\hbar,$$

e pertanto il momento angolare intrinseco dei fotoni è quantizzato in unità di $\hbar$, è diretto lungo la direzione di propagazione dell'onda e assume i valori $\pm\hbar$ per la proiezione $\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ (elicitá del fotone) in corrispondenza dei due stati di polarizzazione circolare.