Gianluca Cruciani

L'altro Fermi

Lungo i primi passi di un genio

Università di Perugia

Facoltà di Scienze M. F. N.

Dipartimento di Fisica

Perugia, 2003

Introduzione

Tutti i lavori pubblicati da Enrico Fermi durante gli studi universitari e normalistici a Pisa, con l'esclusione di quelli legati alla tesi di laurea (la produzione di immagini con i raggi X), riguardano problemi di teoria della relatività prevalentemente rivolti allo sviluppo di applicazioni nell'elettromagnetismo.

Di questa serie di quattro articoli, usciti fra il 1921 e il 1923, tre furono pubblicati sul "Nuovo Cimento" ed uno apparve sui "Rendiconti dell'Accademia dei Lincei".

L'autore stesso li ricorderà come globalmente scaturiti dalla "**faccenda dei 4/3**": il calcolo della massa inerziale elettromagnetica di un sistema di cariche in moto traslatorio accelerato che, secondo la maggioranza dei fisici dell'epoca (Lorentz, Born etc.), attraverso procedure semiclassiche, portava, nel caso di una distribuzione sferica omogenea di raggio r e carica complessiva q, al valore $m = 4/3\ U/c^2$, con $U = q^2 /8\pi\varepsilon_0 r$, in contrasto con il risultato puramente relativistico $m = U/c^2$.

La "faccenda" all'epoca rivestiva una certa importanza, perché veniva naturalmente connessa alla questione della stabilità dell'elettrone: Henri Poincaré, ad esempio, ritenne di poter eliminare la discrepanza introducendo una "forza di coesione" il cui contributo all'energia elettromagnetica risultasse pari a $-1/3\ U$.

Gli articoli del “Nuovo Cimento”

Sulla dinamica di un sistema rigido di cariche elettriche in moto traslatorio.
"Nuovo Cimento", *22*, 199-207 (1921).

Sull' elettrostatica di un campo gravitazionale uniforme e sul peso delle masse elettromagnetiche.
"Nuovo Cimento", *22*, 176-188 (1921).

Correzione di una contraddizione tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica delle masse elettromagnetiche.
"Nuovo Cimento", *25*, 159-170 (1923).

In questi scritti, particolarmente negli ultimi due, Fermi esamina il problema dal punto di vista delle proprietà della metrica di campo gravitazionale uniforme di Levi-Civita:

$$ds^2 = -a^2 dt^2 + \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (1)$$

In essa gli effetti di $a = a\,(x^i)$ sulle equazioni di Maxwell relative ad una distribuzione di cariche in moto sono assimilabili a quelli di una velocità della luce “rallentata” dal campo gravitazionale.

Punti qualificanti:

- Fin dal primo articolo, Fermi riconobbe la ***natura tensoriale*** dell'inerzia del sistema, ossia il fatto che solo in presenza di simmetria sferica si può ricondurre il problema al calcolo di una singola quantità scalare.
- Dopo una sorta di percorso dialettico con se stesso, nel terzo articolo l'autore riconosce nelle diverse modalità di applicazione del ***metodo variazionale di Hamilton***, fra l'approccio classico e quello relativistico, la radice della discrepanza nei valori della massa elettromagnetica. Questo risultato sembra sia stato ottenuto dall'autore a seguito di un "vivace" scambio di vedute con il direttore dell'Istituto di Fisica di Pisa, Luigi Puccianti.
- La questione è, così, risolta scegliendo l'approccio che ***non contraddice il principio di relatività***, per il quale è $m = U/c^2$.

"[*Fermi*] *prendeva i dati di un determinato problema, li elaborava lui stesso e poi confrontava i suoi risultati con quelli ottenuti dagli autori dei saggi. A volte, nella realizzazione di questo tipo di lavoro, egli poneva nuovi problemi e li risolveva oppure, addirittura, correggeva le soluzioni errate se erano ormai universalmente accettate. Nacquero così le sue prime pubblicazioni*." (E. Persico)

Il salto di qualità

Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria
"Rend. Acc. Lincei", *31* (1), 21-23, 51-52, 101-103 (1922)

In questo lavoro, presentato a Pisa il 22/1/1922 da G. Armellini, Fermi intende puntualizzare l'ambito di validità delle discussioni relative al problema dei "4/3", introducendo una procedura geometrica di calcolo tensoriale (o calcolo differenziale assoluto, come si diceva allora) con la quale riconosce alla metrica generalizzata di Levi-Civita la capacità di rappresentare un'intorno completo di una qualsiasi linea oraria -ossia di una curva espressa dall' n-pla $(t, x^1(t), \dots, x^{n-1}(t))$- in una qualunque varietà riemanniana V^n.

A questa analisi verrà presto riconosciuta dignità propria, venendo a costituire il suo principale contributo alla teoria della relatività generale.

La relatività generale: le fonti ai tempi dell'articolo di Fermi

Albert Einstein "I fondamenti della Teoria della relatività generale"
Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie -
Ann. Phys. **49**, 769 (1916)

Tullio Levi-Civita "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente
specificazione geometrica della curvatura riemanniana"
Rend. Circ. Palermo, **42**, 173 (1917)

"ds^2 einsteiniani in campi newtoniani"
Atti Acc. Naz. Lincei, **26-28** (1917-1919)

August Kopff "**I fondamenti della relatività Einsteiniana**"
Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie - Ed. Hirzel, Leipzig, 1921

Herrmann Weyl "**Spazio, tempo, materia**"
Raum, Zeit, Materie - III Ed., Berlin, Springer, 1921

Wolfgang Pauli "**Teoria della relatività**"
Relativitätstheorie - Encyklopädie der matematischen Wissenschaften,
vol. 5, art. 19, Teubner, Leipzig, 1921

La natura del problema

La descrizione dei fenomeni che si intendono studiare nello spazio-tempo è fortemente influenzata, nella sua complessità formale, dalla **scelta di coordinate** che si effettua per rappresentarlo. Ad esempio, se si vuole analizzare un sistema costituito da un punto soggetto a forze e vincolato, nel suo moto, ad una superficie sferica di centro O e raggio R, un riferimento cartesiano (x,y,z) con origine in O può sicuramente essere usato per rappresentarne tutti i possibili stati, tuttavia è "scomodo" in quanto non in grado di sfruttare le simmetrie indotte dalla natura del vincolo: a questo scopo, come sappiamo, vengono adottate le coordinate sferiche (ρ, θ, φ) in O, cosicché la condizione vincolare si esplica come $\rho = R$, rendendo qualsiasi problema formalizzabile per mezzo delle sole due coordinate angolari. Il prezzo da pagare per questa semplificazione consiste, però, nell'indeterminazione della *gauge* (termine alternativo a "scelta di coordinate") ai poli della sfera, dove a $\theta = 0$ ed a $\theta = \pi$ può corrispondere qualsiasi valore di φ.

Nella **Nota 1** dell'articolo, Fermi pone esattamente questo tipo di problema alla nostra attenzione: data una linea di universo L su di una varietà di Riemann ad n dimensioni, V^n, va trovato un sistema di coordinate solidale con la curva stessa, cioè con origine su L, "*tale che, in vicinanza della linea studiata, il* ds^2 *della varietà prenda una forma semplice*", ossia in grado di rappresentare lo spazio-tempo attorno ad L conferendogli la forma più elementare possibile, nella fattispecie quella di Levi-Civita (1).

La costruzione geometrica della base di Fermi

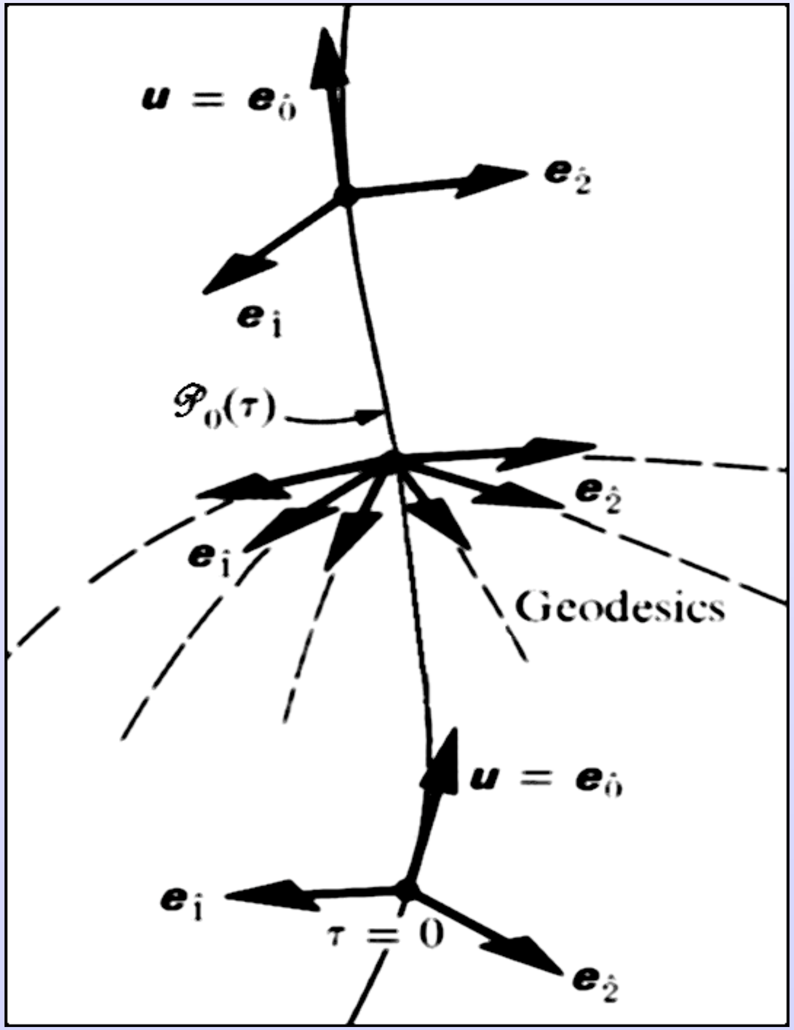
- *In un punto P si considera il* ***versore tangente*** *alla curva L come il primo della base di Fermi,* $\mathbf{e}_0^{P}$ *; in ogni punto di L esso sarà, quindi, completamente determinato dalla forma della curva, senza alcuna arbitrarietà.*

- *Tutti gli altri* ***n-1*** *elementi della base vengono scelti in modo da formare un sistema* ***ortonormale*** *con* $\mathbf{e}_0^{P}$ *; se P è il "punto iniziale" del moto, tale scelta è arbitraria.*

- *In un punto Q infinitamente vicino a P, si* ***trasporta parallelamente*** *l'intera base scelta in P (quest'azione ne conserva l'ortonormalità): il versore trasportato dal versore tangente,* $\mathbf{e}_0^{Q\,7\,P}$*, non coinciderà con* $\mathbf{e}_0^{Q}$ *(versore tangente ad L in Q), se L non è una* ***geodetica****, cioè una traiettoria di moto inerziale.*

- *La nuova base di Fermi in Q è quella che si ottiene* ***ruotando*** $\boldsymbol{V^{n}}$ *attorno al supplemento ortogonale del piano (perfettamente determinato) che contiene* $\mathbf{e}_0^{Q}$ *ed* $\mathbf{e}_0^{Q\,7\,P}$*, in modo che quest'ultimo si venga a sovrapporre ad* $\mathbf{e}_0^{Q}$ *.*

Le coordinate di Fermi



Composizione da *Misner, Thorne, Wheeler* *"**Gravitation**", Freeman, New York, 1973*

In figura, la linea di universo di un **osservatore** in uno spazio-tempo con due coordinate spaziali ed una temporale è sede di moto di un sistema ortonormale in cui $\boldsymbol{e_0}$ è la 3-velocità dell'osservatore stesso, τ è il tempo proprio riferito ad un evento-origine (contrassegnato da $\tau = 0$), mentre $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ sono tangenti, in ogni punto della curva, a due delle infinite geodetiche del genere spazio che ivi la intersecano normalmente. Un punto Q esterno ma sufficientemente vicino a $P_0(\tau)$ verrà raggiunto da una di tali geodetiche (la cui tangente in $P_0(\tau)$ risulterà essere una combinazione lineare di $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ con coefficienti n^1, n^2) alla distanza propria s, cosicché le "coordinate di Fermi" di Q saranno $x^0 = \tau$, $x^i = s\, n^i$.

Cenni sulla costruzione analitica in V^4

Va stabilito il modo in cui la perpendicolarità di un vettore ***v*** al versore tangente ***u*** di una curva L si riflette sulla sua equazione del trasporto “alla Fermi”; se *D*/*ds* è l’operatore di derivata covariante lungo una curva del genere tempo parametrizzata da *s* , si ha:

$$
\begin{aligned}
v_\alpha u^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{D}{ds}(v_\alpha u^\alpha) = 0 = \frac{D v_\alpha}{ds} u^\alpha + v^\alpha \frac{D u_\alpha}{ds} \\
& \frac{D v^\alpha}{ds} u_\alpha = -v^\alpha \frac{D u_\alpha}{ds} \\
& \frac{D v^\alpha}{ds}(u_\beta u^\beta) = -(a_\beta v^\beta) u^\alpha \\
& \frac{D v^\alpha}{ds} = (a_\beta v^\beta) u^\alpha
\end{aligned}
$$

dove ***a*** = *D* ***u*** /*ds* = 4–accelerazione lungo L (ortogonale a ***u*** e di lunghezza unitaria) e, per definizione, ***u*** • ***u*** = –1 .
A questo punto, decomponendo un qualunque vettore, per cui valgano le condizioni dette, nella direzione ***u*** ed ortogonalmente ad essa, mentre la prima componente rimarrà costante, la seconda si trasformerà con la legge di cui sopra, per cui:

$$
\left.\frac{D v^\alpha}{ds}\right|_{FW} = \mathbf{v}^{\parallel} \frac{D u^\alpha}{ds} + \frac{D \mathbf{v}^{\perp}}{ds} = (u^\alpha a_\beta - a^\alpha u_\beta) v^\beta = 0
$$

La metrica nelle vicinanze di L

Per descrivere, al primo ordine, l'elemento di distanza in un punto Q situato nei pressi di P $\in$ L al progredire del sistema di riferimento (con origine in P) lungo L stessa, Fermi osserva che il contributo proveniente dal supplemento ortogonale di $\boldsymbol{e_0}^{\boldsymbol{P}}$ può essere mantenuto costante in Q, se questo descrive "*una linea di decorso parallelo ad L*", quindi, essendo la metrica Euclidea lungo L, tale rimarrà, relativamente a questo sottospazio, anche nelle sue immediate vicinanze.

Relativamente alla deformazione dello spazio-tempo indotta dalla rotazione del vettore tangente, essa si quantifica in un termine additivo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}$, dove $\boldsymbol{y}$ è il vettore distanza di Q da P, di coordinate $(0, y^1, \ldots, y^{n-1})$. Dunque:

$$ds^2 = -(1 + a_\alpha\, y^\alpha)^2\, d\tau^2 + \delta_{ij}\, dy^i\, dy^j$$

che, riscrivendo la correzione al primo ordine, diventa:

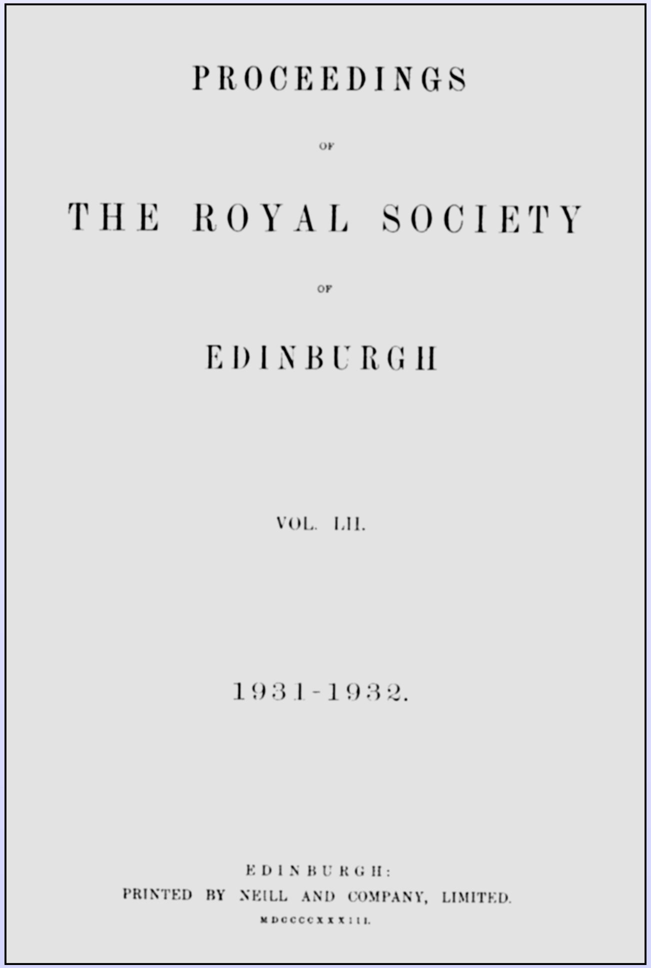
$$ds^2 = -(1 + 2\, a_\alpha\, y^\alpha)\, d\tau^2 + \delta_{ij}\, dy^i\, dy^j$$

chiaramente, entrambe le forme sono del tipo (1).

Un importante sviluppo

A. G. Walker: “Relative Co-ordinates”

(luglio 1932) *pp. 345-353*


PROCEEDINGS

OF

THE ROYAL SOCIETY

OF

EDINBURGH

VOL. LII.

1931-1932.

EDINBURGH:
PRINTED BY NEILL AND COMPANY, LIMITED.
MDCCCCXXXIII.

È una trattazione più formale, adatta ad una più immediata traduzione nei calcoli tensoriali, in cui si mostra l’applicazione delle procedure di Fermi a grandezze vettoriali indipendentemente dal loro “ancoraggio” ad una curva geodetica.
È interessante notare che l’autore non cita il lavoro dei “Rendiconti”, pur facendo riferimento al testo *Riemannian Geometry* di L. P. Eisenhart e conoscendo certamente le *Lezioni di Calcolo Differenziale Assoluto* di T. Levi-Civita, tradotte in inglese nel 1926; testi, questi, che riportano in bibliografia l’articolo del fisico italiano.
Va, comunque, riconosciuto a Walker il merito di aver imposto all’attenzione del mondo accademico anglosassone i risultati che, più tardi, gli varranno la “coabitazione” onorifica con Fermi nell’intitolazione del **trasporto** oggi detto **di Fermi-Walker**.

Oggi

Nel suo lavoro, Fermi non fa esplicitamente menzione dell'esigenza di mantenere il riferimento dell'osservatore ***non rotante*** attorno al proprio baricentro, perché la procedura sviluppata sia valida. È assunto implicitamente che lo spazio-tempo definisca il parallelismo con l'assunzione di un riferimento "remoto" (le classiche "galassie lontane").

La più completa estensione della derivata di Fermi-Walker, relativa ad un sistema di riferimento dotato di accelerazione rototraslazionale, è relativamente recente e si scrive:

$$\nabla_{\vec{u}}\,\vec{x} = \frac{D}{d\,s}\,\vec{x} + \mathbf{\Omega}\cdot\vec{x} = D_{\vec{a}}^{FW}\,\vec{x} + D_{\vec{\omega}}\,\vec{x}$$
$$\overset{coord}{=} x^{\alpha}{}_{;\,\beta}\,u^{\beta} + \left[\left(a^{\alpha}\,u_{\beta} - u^{\alpha}\,a_{\beta}\right) + \epsilon^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\,u^{\gamma}\omega^{\delta}\right]x^{\beta}$$

in cui $\mathbf{\Omega}$, il generatore delle trasformazioni infinitesime di Lorentz, si separa in due parti: la traslazionale, che va a comporre, con la derivata covariante in s della posizione del punto, il termine di Fermi-Walker "classico", e la rotazionale, che costituisce il termine additivo in $\boldsymbol{\omega}$, velocità angolare dell'osservatore.

Epilogo

L' "uomo della fissione", il primo e più grande fisico teorico italiano, si rivelò come ragazzo prodigio *occupandosi di relatività da studente, a Pisa, con lavori pionieristici per l'asfittica ricerca italiana dell'epoca.*
La sua dedizione era tale che vien fatto di chiedersi se abbia mai rimpianto, in età matura, il tempo sottratto ai tradizionali trastulli della giovinezza...