

**Dipartimento di Fisica-Università di Pisa**

**F.Giammanco**

**F.Maccarrone**

**G.Paffuti**

**APPUNTI di ANALISI.**



**ETS EDITRICE**

Questi appunti sono indirizzati agli studenti del I anno del Corso di Laurea in Fisica con lo scopo di fornire alcuni strumenti elementari di analisi matematica necessari per il Corso di Fisica Generale I. Questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il Corso di Analisi, tuttavia esiste uno sfasamento temporale fra l'uso di strumenti matematici, come derivate ed integrali, nel Corso di Fisica I ed il loro studio nel Corso di Analisi.

Abbiamo dato a questi appunti un taglio volutamente più pratico che teorico, tuttavia abbiamo anche cercato di mettere in evidenza, di volta in volta, alcuni concetti di carattere generale che verranno ampiamente discussi nel Corso di Analisi, perchè lo studente non abbia l'impressione che tutto si possa risolvere con l'apprendimento mnemonico di formule. Quindi, questi appunti devono costituire una base di lavoro per lo studente e uno stimolo per un ulteriore approfondimento. Nello stesso tempo, abbiamo cercato di approntare uno strumento di "emergenza" per colmare il divario di formazione matematica fra studenti provenienti da Scuole Superiori diverse.

Questi appunti sono parte integrante di un precorso che nasce, quest'anno, in via sperimentale in accordo con gli studenti degli anni superiori e con lo scopo di rendere meno "traumatico" l'approccio allo studio della Fisica e l'ambizione di aiutare lo studente a "camminare con le proprie gambe".

Gli Autori

Pisa, 31 Agosto 1990

L'esperienza dell'anno passato si è rivelata positiva: circa cento studenti hanno partecipato al precorso e vogliamo sperare sia loro servito. Quest'anno l'esperimento sarà ripetuto. Rispetto all'anno scorso viene aggiunto un capitolo su alcune proprietà elementari dei vettori.

Gli Autori

Pisa, 31 Agosto 1991

# Capitolo 1

## FUNZIONI

### 1.1 Introduzione

Consideriamo due insiemi  $A$  e  $B$ . Si chiama *funzione* una relazione tra  $A$  e  $B$  tale che ad ogni elemento di  $A$  è associato *un* elemento di  $B$ .

Si scrive

$$f : A \rightarrow B$$

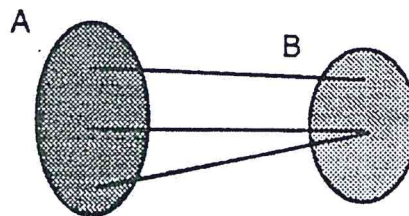
Se si vuole esplicitare la corrispondenza fra elementi  $a \in A$  ed elementi  $b \in B$  si può scrivere:

$$f(a) = b$$

$A$  si chiama campo di definizione di  $f$ .

$B$  descrive il tipo di valori assunto da  $f$ .

Ad ogni valore di  $A$  è associato  
un solo valore in  $B$ .



Funzione  $f : A \rightarrow B$

Es.1  $A = \{\text{Studenti di Fisica}\}$ ,  $B = \{\text{In corso}, \text{Fuori corso}\}$ . Per ogni studente,  $x$ ,  $f(x)$  assegna la frase "In corso" o "Fuori corso". Chiaramente non ha senso chiedere quanto fa  $f(\text{gatto})$ , cioè occorre fare attenzione a non considerare una funzione all'esterno del suo dominio di definizione.

Es.2  $f(x) = x^2$  indica una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

Es.3  $f(x) = +\sqrt{x}$   $A = \mathbb{R}^+$  : non si può fare  $\sqrt{-1}$  se la funzione prende valori solo sui numeri reali (cioè  $B$  è l'insieme dei numeri reali).

Es.4 La scrittura  $f(x) = \pm\sqrt{x}$  non indica una funzione ma *due* funzioni diverse.

#### Terminologia

- Consideriamo  $f : A \rightarrow B$ . L'insieme  $f(A)$  contenuto in  $B$  è detto immagine di  $A$ . Se  $f(A) = B$  la funzione è detta *surgettiva*.
- Può succedere che a punti di partenza diversi corrispondano sempre punti di arrivo diversi per una funzione, può cioè succedere che

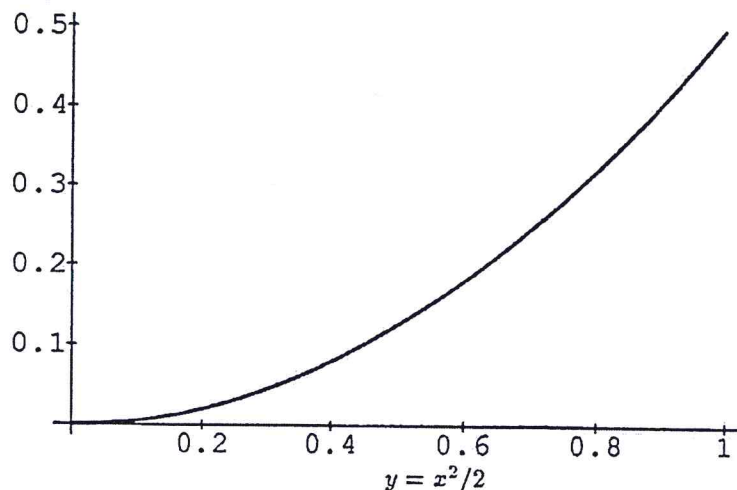
$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

In tal caso la funzione si dice iniettiva.

Es.1  $f(x) = x^2$ ;  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  non è iniettiva:  $f(a) = a^2$   
 $f(-a) = a^2$

Es.2  $f(x) = x^3$ ;  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è iniettiva.

Molto spesso capiterà di studiare funzioni definite come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o da una regione di  $\mathbb{R}$  (intervallo aperto) in  $\mathbb{R}$ . In questi casi ad ogni valore  $x \in \mathbb{R}$  è associato un numero  $f(x)$ . Si scrive spesso  $y = f(x)$ . Per rappresentare questa situazione si può procedere nel seguente modo. In un piano cartesiano si riporta in ascissa la variabile indipendente  $x$  ed in ordinata la variabile  $y$ . Ogni punto  $P$  sul piano ha due coordinate  $(x, y)$ . È intuitivo che al variare di  $x$  il punto  $P$  sul piano si muove e descrive una curva. Un esempio si può vedere nella figura:



## 1.2 Funzioni elementari

Le funzioni più usate sono forse quelle che sfruttano la struttura algebrica dei numeri reali. Supponiamo ad esempio di fare la seguente somma:

$$2 + 3 = 5$$

Pensate di fare questa operazione con una calcolatrice tascabile, la struttura logica dell'operazione è:

- Input 2 , 3
- Operazione +
- Risultato 5

Quindi la somma è composta da un'operazione ( + ) che agisce su una *coppia* di numeri e dà come risultato un numero. In altre parole "+" è una funzione che associa ad una coppia di numeri un numero reale, cioè:

$$+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad z = x + y \quad \text{si può scrivere} \quad z = +(x, y)$$

Analogamente possiamo definire:

- Il prodotto  $\cdot(x, y) = x \cdot y$
- La divisione  $:(x, y) = x/y$

Una tipologia di funzioni forse più nota è data dalle funzioni che associano numeri reali a numeri reali :

$$y = f(x) \quad \text{dove} \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R}$$

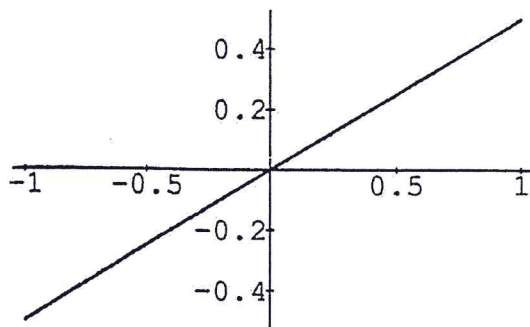
Per avere una idea qualitativa di queste funzioni è conveniente fare un *grafico* che ne evidenzi le proprietà. A tale scopo si tracciano degli assi cartesiani in un piano e si associa alla coppia di valori  $(x, y)$  un punto  $P$  in tale piano. Intuitivamente al variare di  $x$  il punto  $P$  descrive una curva che "rappresenta" la funzione.

Es.1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Come si vede dal grafico la funzione è iniettiva e surgettiva

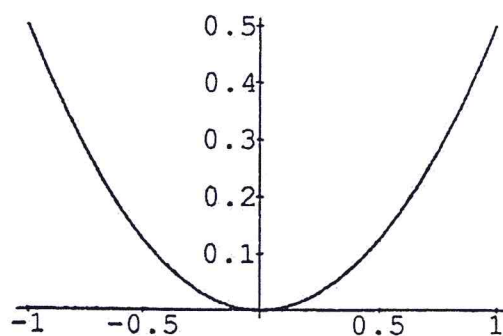


Es.2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = \frac{x^2}{2}$$

Come si vede dal grafico la funzione non è iniettiva e non è surgettiva  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

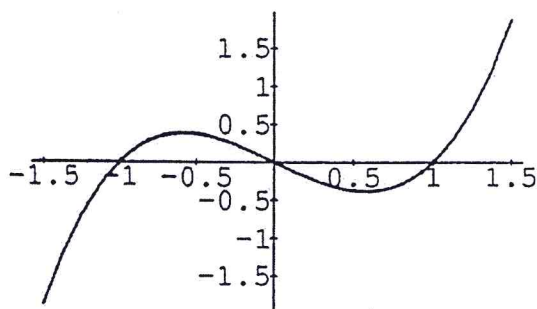


Es.3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = x^3 - x$$

Pensate che la funzione sia iniettiva o surgettiva?

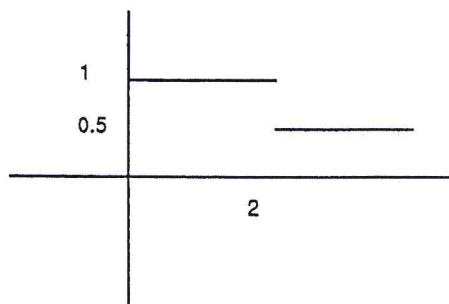


Es.4

Una rappresentazione grafica si può anche usare in casi un pò più complicati:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 2 \\ 1/2 & 2 < x \end{cases}$$

La funzione fa un "salto" per  $x=0$  e  $x=2$  ma ha un solo valore anche in questi punti.

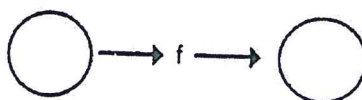




### 1.3 Composizione di funzioni

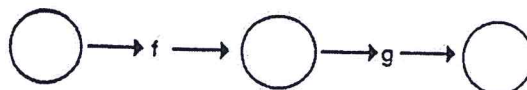
Si è visto che definire una funzione equivale a stabilire una regola di corrispondenza tra due insiemi  $A$  e  $B$ , come illustrato schematicamente nella figura accanto per una generica

$$f: A \rightarrow B$$



Supponiamo ora di avere un'altra funzione  $g: B \rightarrow C$ . È naturale che si possa definire la composizione delle due operazioni:

$$F = g \circ f \quad F: A \rightarrow C$$



La definizione è ovvia:

$$a \xrightarrow{F} c \quad \text{è definita da} \quad a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

Di solito si scrive  $(g \circ f)(a) = c$  oppure  $g(f(a)) = c$ .

Ad esempio la funzione  $z = (x + y)^2$  corrisponde alle operazioni:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{somma}} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{quadrato}} \mathbb{R}$$

Altri esempi sono:

$$\sin(\omega x) \quad \cos(x^2 + 2x) \quad \sqrt{\log x^2 + 1}$$

È chiaro che con questo procedimento si possono costruire funzioni arbitrariamente complicate.

### 1.4 Inverso di Funzioni

Vogliamo analizzare il seguente problema: supponiamo di avere una corrispondenza, fra due insiemi  $A$  e  $B$ , stabilita da una funzione  $f, f: A \rightarrow B$ . È possibile definire una corrispondenza inversa  $f^{-1}: B \rightarrow A$ ?

La funzione  $f^{-1}$  se esiste verrà chiamata inversa di  $f$  e deve soddisfare alle evidenti proprietà:

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{f^{-1}} a \quad b \xrightarrow{f^{-1}} a \xrightarrow{f} b$$

È chiaro innanzitutto che  $f^{-1}$  è definibile solo se  $f$  è iniettiva perchè  $f^{-1}$  deve assumere un solo valore su un elemento di  $A$ .

Es.1

$$\begin{array}{lll} y = 5x = f(x) & x \rightarrow 5x & f^{-1}: x \rightarrow \frac{1}{5}x \\ y = x^3 = f(x) & x \rightarrow x^3 & f^{-1}: x \rightarrow x^{1/3} \end{array}$$

In questi casi si ha, come voluto,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \in A \quad (f \circ f^{-1})(x) = x \in B$$

Es.2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f: x \rightarrow x^2$$

La funzione  $f$  non è iniettiva ( $f(\pm a) = a^2$ ) ma se ci si limita ai soli numeri positivi:

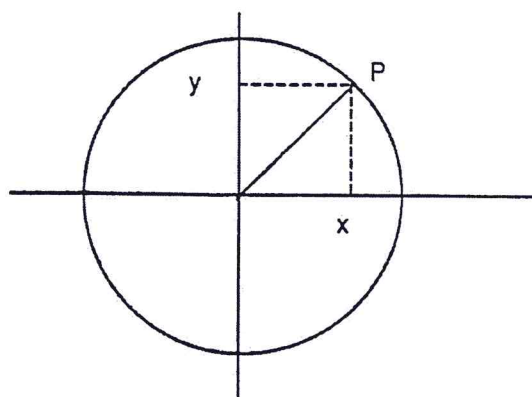
$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ & f: x \rightarrow x^2 \\ f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ & f^{-1}: x \rightarrow +\sqrt{x} \end{array}$$

## 1.5 Funzioni Trigonometriche

Consideriamo in un sistema di assi cartesiani un cerchio di raggio  $R$  centrato nell'origine. La posizione di un punto  $P$  sul cerchio è determinata da due coordinate  $x, y$  che soddisfano alla relazione

$$x^2 + y^2 = R^2$$

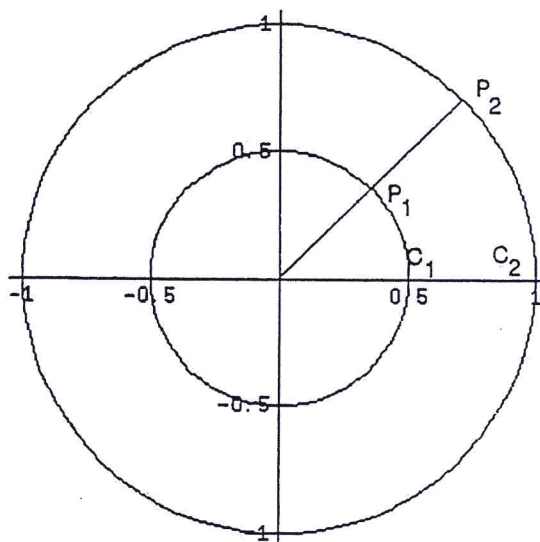
È chiaro dalla figura che la stessa posizione può essere determinata una volta assegnato l'angolo che la congiungente  $OP$  fa con l'asse delle  $x$ . Il nostro problema è studiare che relazione c'è fra l'angolo  $\theta$  e le coordinate  $x, y$ .



Cerchio trigonometrico

Innanzitutto una premessa. Ci sono molti modi per misurare gli angoli. Noi useremo sempre i radianti. La misura in radianti di un dato angolo  $\theta$  è il rapporto tra la lunghezza dell'arco di cerchio sotteso dall'angolo ed il raggio del cerchio. Sofferamoci un momento su questa definizione perchè è un esempio di costrutto logico che userete spesso. Tenendo presente la figura accanto è noto dalla geometria elementare che la lunghezza dell'arco  $C_1P$  è proporzionale al raggio  $R_1$ , cioè dati due qualsiasi cerchi di raggi rispettivamente  $R_1$  e  $R_2$  si ha

$$\frac{C_1P_1}{R_1} = \frac{C_2P_2}{R_2}$$



Ma allora il rapporto  $CP/R$  non dipende dal particolare cerchio in esame, ma solo dall'angolo  $\theta$ . Si può prendere questo rapporto come una *misura* dell'angolo. L'angolo misurato in tale modo si dice misurato in radianti. La seguente tabella di corrispondenza fra gradi e radianti dovrebbe risultare ovvia:

|             |                     |
|-------------|---------------------|
| $0^\circ$   | $\rightarrow 0$     |
| $90^\circ$  | $\rightarrow \pi/2$ |
| $180^\circ$ | $\rightarrow \pi$   |
| $360^\circ$ | $\rightarrow 2\pi$  |

- 1) Poichè sia gli archi di cerchio che i raggi hanno le stesse unità di misura (es. cm) i radianti sono numeri puri, cioè *adimensionali*.
- 2) La misura di una classe di oggetti, ad es. gli angoli, dal punto di vista matematico è l'assegnazione di una funzione da tale classe in  $\mathbb{R}$ , cioè l'assegnazione di un numero. La procedura usata sopra è caratteristica: il fatto che i rapporti  $CP/R$  non dipendano dal raggio  $R$  (che è l'unica caratterizzazione dei vari cerchi) implica che la funzione è ben definita, cioè ad ogni angolo corrisponde un solo valore cioè una ben determinata misura.
- 3) Per convenzione si definiscono positivi gli angoli contati in senso antiorario, negativi quelli in senso orario.

- 4) Chi ha studiato la definizione di Temperatura in Termodinamica può trovare le analogie tra la procedura adottata per definire la misura degli angoli e quella usata per definire la scala termodinamica delle temperature.

Dopo questa digressione sugli angoli torniamo alle funzioni trigonometriche. Dalla geometria elementare è noto che i rapporti  $x/R$  e  $y/R$  fra le coordinate di un punto  $P$  sulla circonferenza ed i raggi di tale circonferenza, non dipendono dal particolare cerchio in esame. La discussione precedente dovrebbe perciò rendere chiara l'affermazione che tali rapporti, benché definiti su un particolare cerchio dipendono unicamente dall'angolo  $\theta$  che la congiungente  $OP$  fa con l'asse delle  $x$ , e non dal cerchio preso in esame. In altre parole questi rapporti sono funzioni dell'angolo e vengono indicate come:

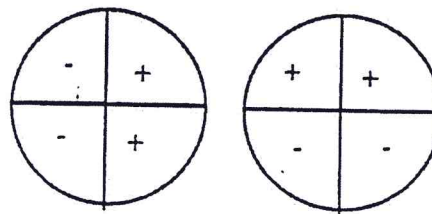
$$\text{DEF} \quad \frac{x}{R} = \cos \theta \quad \frac{y}{R} = \sin \theta$$

Dalla definizione data lo studente è invitato a verificare che

- Per ogni valore di  $\theta$   $|\sin \theta| \leq 1$  e  $|\cos \theta| \leq 1$
- Per ogni valore di  $\theta$   $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Al variare dell'angolo  $\theta$  il punto  $P$  si muove lungo la circonferenza di raggio  $R$  e quindi le sue coordinate variano nell'intervallo  $-R + R$ , corrispondentemente le funzioni  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  variano fra  $-1$  e  $+1$ . La figura accanto può costituire una guida mnemonica per visualizzare le variazioni delle funzioni. Lo studente, in base alle definizioni date, può verificare che:

$$\begin{array}{ll} \sin 0 = 0 & \cos 0 = 1 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \pi = 0 & \cos \pi = -1 \\ \sin 2\pi = 0 & \cos 2\pi = 1 \end{array}$$



Coseno

Seno

Segni delle funzioni trigonometriche.

Analizziamo ora una delle proprietà fondamentali delle funzioni trigonometriche: la *periodicità*. Consideriamo al solito un punto  $P$  su una circonferenza di raggio  $R$ . È evidente che se il punto compie un giro completo della circonferenza le sue coordinate riassumono il valore iniziale. Per come abbiamo definito la misura degli angoli, fare un giro significa incrementare il valore dell'angolo  $\theta$ , associato alla posizione di  $P$ , di  $2\pi$ . Poiché dopo ogni giro le coordinate riassumono lo stesso valore deve essere:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

L'affermazione precedente vale per ogni valore di  $\theta$  e si esprime dicendo che le funzioni  $\sin(\theta)$  e  $\cos \theta$  sono funzioni periodiche con periodo  $2\pi$ .

In generale una funzione  $f(x)$  si dice periodica con periodo  $T$  se vale per ogni  $x$

$$f(x + T) = f(x)$$

e  $T$  è il più piccolo numero per cui vale tale proprietà. La funzione si riproduce ogni periodo  $T$ .



Lo studente può a questo punto provare a riprodurre i grafici delle funzioni  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  riprodotti accanto, usando ad esempio una piccola calcolatrice per estrarre i valori delle funzioni in qualche punto.

Consideriamo ad esempio la funzione  $\sin(x)$ . Per  $x = 0$  il suo valore è zero. Quando l'angolo ( $x$  in questo caso) si avvicina al valore  $\pi/2$  l'ordinata del punto P cresce e la funzione si avvicina al suo massimo: 1, quindi decresce. La funzione ha uno zero per  $x = \pi$  che corrisponde al passaggio del punto P nel semipiano inferiore degli assi cartesiani etc. Lo studente può anche facilmente verificare che:

- $\sin(-x) = -\sin(x)$  funzione dispari
- $\cos(-x) = \cos(x)$  funzione pari
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$  etc.

#### Proprietà di somma

Le seguenti proprietà delle funzioni trigonometriche sono spesso usate:

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

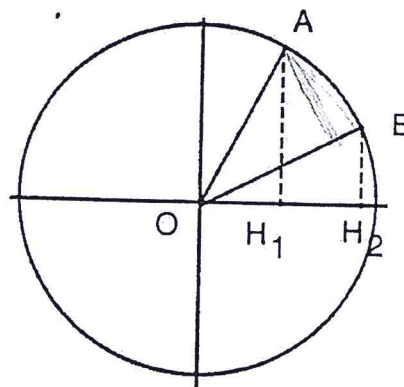
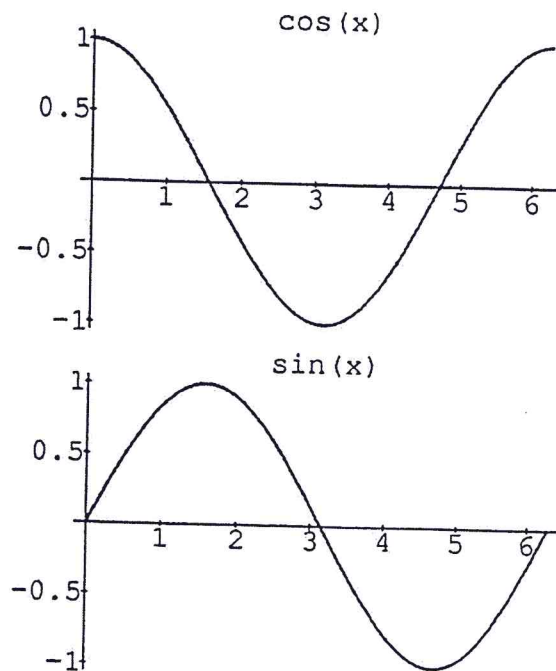
Con riferimento alla figura accanto la prima di queste proprietà è facile da dimostrare notando che per l'area del triangolo  $OAB$  si ha

$$A_{OAB} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2}$$

e sfruttando la relazione:

$$A_{OAB} = A_{OAH_1} + A_{H_1ABH_2} - A_{OBH_2}$$

Le altre relazioni di somma sono una conseguenza della prima e delle relazioni già viste per le funzioni trigonometriche.



## 1.6 Funzioni trigonometriche inverse

Dalla discussione precedente si deduce che le funzioni trigonometriche sono funzioni del tipo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

Come si può vedere facilmente dai loro grafici le funzioni  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  non sono iniettive, anzi, essendo periodiche, ogni numero compreso fra -1 e +1 ha infinite "controimmagini". Ad esempio se  $\sin(x_0) = y_0$  allora per tutti i valori della variabile  $x$  del tipo:

$$x_{2k} = x_0 + 2k\pi \quad x_{2k+1} = (2k-1)\pi - x_0$$

si ha

$$\sin(x_i) = y_0$$

Nelle equazioni precedenti  $k$  è un qualsiasi numero intero.

Per definire le funzioni inverse occorre in qualche modo *restringere* il campo di definizione delle funzioni, in maniera tale che in questo campo ristretto esse siano iniettive. Ad esempio si può scegliere per il seno l'intervallo  $[-\pi/2, \pi/2]$  e per il coseno l'intervallo  $[0, \pi]$ . Si possono allora definire le funzioni inverse  $\arccos$  e  $\arcsin$ :

$$\begin{aligned} \arcsin: [-1, 1] &\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arccos: [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \end{aligned}$$

tali che

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(x)) &= x \\ \cos(\arccos(x)) &= x \end{aligned}$$

Lo studente può facilmente convincersi che i grafici di queste funzioni si ottengono scambiando tra loro gli assi  $x$  e  $y$  delle funzioni seno e coseno.

## 1.7 Tangente e Cotangente

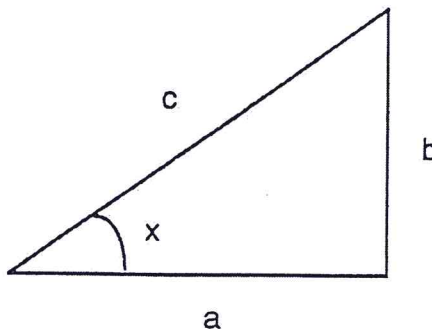
Accanto alle funzioni  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  si definiscono le funzioni tangente e cotangente come:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

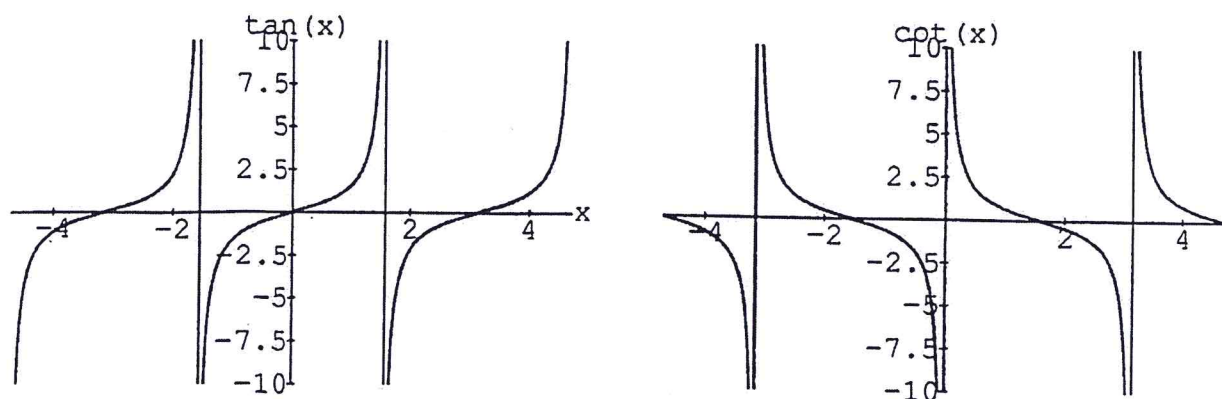
L'interpretazione geometrica di tali funzioni è immediata. Con riferimento alla figura accanto si ha:

$$\begin{aligned} \sin x &= b/c & \cos x &= a/c \\ \tan x &= b/a & \cot x &= a/b \end{aligned}$$

Ricordando che le funzioni  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  cambiano di segno entrambe se il loro argomento incrementa di  $\pi$  se ne deduce che le funzioni  $\tan(x)$  e  $\cot(x)$  sono funzioni periodiche con periodo  $\pi$ .



Le funzioni  $\tan(x)$  e  $\cot(x)$  sono un po' più patologiche rispetto a quelle viste in precedenza. In effetti ad esempio  $\tan(x)$  non è definita per i valori di  $x$  per cui il coseno si annulla, cioè nei punti  $x_k = \pi/2 + k\pi$ . Quando si considerano valori di  $x$  prossimi a  $\pi/2$  ma minori di esso la funzione è positiva e cresce indefinitamente. Al contrario per valori prossimi a  $\pi/2$ , ma maggiori, la funzione è negativa, benché crescente. È facile convincersi che i grafici delle funzioni  $\tan(x)$  e  $\cot(x)$  sono:



I grafici mostrano, tra l'altro, i domini di definizione delle due funzioni. Ad esempio per  $\tan(x)$  il dominio è  $\mathbb{R} - \{A\}$ , dove  $\{A\}$  è l'insieme dei punti  $x_k = \pi/2 + k\pi$ . Analogamente si può dire che il dominio di definizione di  $\cot(x)$  è  $\mathbb{R} - \{B\}$ , con  $\{B\}$  l'insieme dei punti  $x_k = k\pi$ . In definitiva usando il linguaggio precedente:

$$\tan : \mathbb{R} - \{A\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cot : \mathbb{R} - \{B\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Lo studente può provare come esercizio a definire le funzioni inverse e a farne il grafico.

## 1.8 Funzione esponenziale

In questo paragrafo vogliamo studiare una generalizzazione della solita funzione di elevamento a potenza. Partiamo da un numero reale, positivo,  $a$ , con  $a \neq 1$ , e consideriamo le sue potenze:  $a^0, a^1, \dots, a^n, \dots$ . Una volta fissato  $a$  è chiaro che la successione precedente di potenze non è altro che una funzione dall'insieme dei numeri interi  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{R}$ :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni numero intero  $n$  associa un numero reale  $a^n$ :

$$f(n) = a^n$$

Introducendo la nozione di radice (cioè radici quadrate, cubiche etc.) è possibile "estendere" la funzione sopra descritta all'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali:

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{p/q}$$

Prima di andare avanti facciamo alcune osservazioni:

- Dovrebbe essere chiaro perchè abbiamo scelto  $a$ , che si chiama base dell'esponente, diversa da 1 e positiva. Per  $a = 1$  la funzione si banalizza (tutte le potenze sarebbero uguali a 1); se  $a < 0$  l'estensione ai numeri razionali comporterebbe radici di numeri negativi e quindi l'immagine della funzione non potrebbe essere limitata ai numeri reali.
- Nel procedimento di estensione da  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Q}$  abbiamo implicitamente assunto che continuino a valere le stesse procedure formali per la manipolazione degli oggetti, ad esempio

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

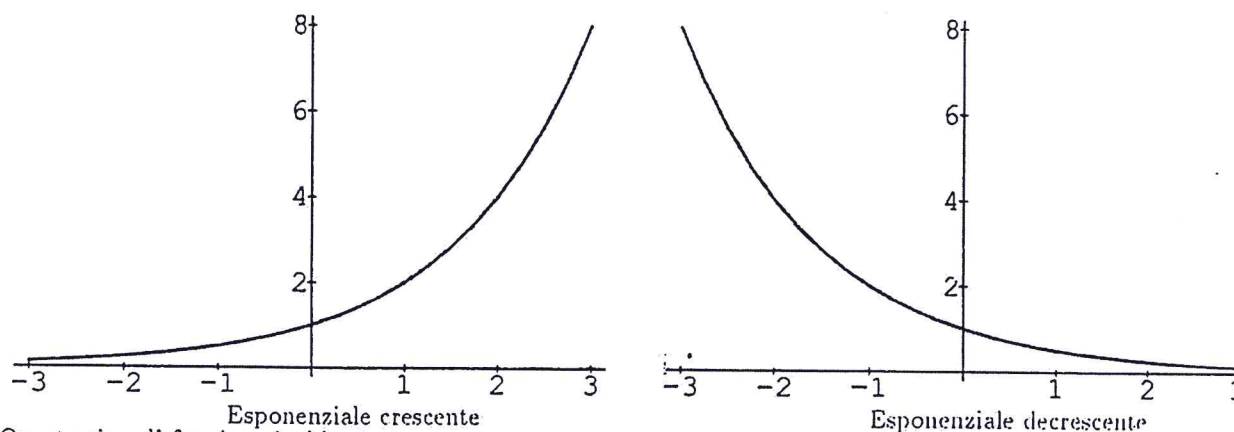
Questo può essere dimostrato abbastanza semplicemente ma lo diamo per scontato.

La funzione esponenziale non è altro che l'ulteriore, ovvia, estensione da  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$  della funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f : x \rightarrow a^x$$



$a$  è un arbitrario numero positivo (per  $a = 0$  e  $a = 1$  la funzione è banale). Il procedimento usato è intuitivo e lo studente lo incontrerà spesso, più o meno esplicitato, in molte situazioni. Questa procedura è però più sottile di quanto a prima vista possa apparire. Cerchiamo di vederlo con un esempio. Consideriamo per fissare le idee  $a = 2$ . È chiaro cosa significhi fare le potenze intere di 2. È quasi altrettanto chiaro, lo studente lo ha studiato a scuola, che è possibile fare le radici quadrate, cubiche etc. e quindi è "costruttivamente" possibile definire  $2^{p/q}$ . Ma cosa significa calcolare  $2^{\sqrt{2}}$ ? La risposta è semplice ed usa la stessa tecnica che avrete già visto per definire le radici quadrate: si può approssimare  $\sqrt{2}$  a piacere usando numeri razionali, di cui si sa fare l'esponenziale, il numero  $2^{\sqrt{2}}$  è definito come "limite" di questa approssimazione successiva (più avanti sarà richiamato il concetto di limite). Questo procedimento di limite è molto comune e, come vedrete in seguito, corrisponde a una ben precisa proprietà strutturale della funzione: la continuità. Lo studente può riprendere questo esempio dopo avere studiato la continuità ed i limiti per verificare le affermazioni fatte qui. Dopo questa breve digressione torniamo alla funzione esponenziale  $a^x$ . Come è facile intuire per  $a > 1$  la funzione esponenziale ha una crescita molto rapida mentre per  $a < 1$  decresce rapidamente.



Questo tipo di funzione è abbastanza comune.

Es.1 Pensiamo ad una popolazione di batteri che si raddoppia dopo un tempo  $\tau$ . La popolazione dopo un tempo  $t$  sarà data da

$$P(t) = P_0 2^{t/\tau}$$

dove  $P_0$  rappresenta la popolazione iniziale.

Es.2 Per un elemento radioattivo con tempo di dimezzamento  $\tau$  il numero di atomi radioattivi al tempo  $t$  è dato da

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/\tau}$$

Dal punto di vista generale la funzione esponenziale ha le seguenti caratteristiche, posto  $f(x) = a^x$ :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(0) = 1 \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

In altre parole è una funzione che trasforma le proprietà additive dei numeri reali nella struttura moltiplicativa dei numeri reali positivi.

Dai grafici dovrebbe risultare chiaro che la funzione è iniettiva e surgettiva su  $\mathbb{R}^+$ .

Il numero  $a$ , la base dell'esponenziale, nelle definizioni precedenti è arbitrario; esiste però una base particolarmente utile ed è quella più usata, la cosiddetta base naturale in cui si prende come base il numero di Eulero  $e$ . Questo è un numero trascendente e le sue prime cifre valgono:

$$e = 2.718281828459045 \dots$$

Il perché di questa scelta si vedrà in seguito. Nel prossimo paragrafo si vedrà come si fa a cambiare base.



## 1.9 Logaritmi

Si è visto nel paragrafo precedente che la funzione esponenziale è iniettiva, quindi è possibile definire una funzione inversa: tale funzione si chiama logaritmo.

$$a^x = y \Rightarrow \lg_a y = x$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{a^x} \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\lg_a x} \mathbb{R}$$

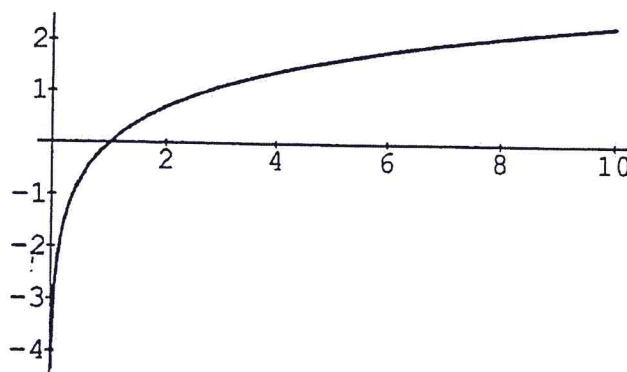
In altre parole il logaritmo in base  $a$  di un numero  $z$  è quel numero  $c$  a cui bisogna elevare  $a$  per ottenere  $z$ :

$$a^c = z$$

Dovrebbe essere chiaro dalla discussione sull'esponenziale che il dominio di definizione del logaritmo è costituito dai numeri reali positivi.

Come per le altre funzioni inverse anche per il logaritmo il suo grafico si ottiene dall'esponenziale scambiando tra di loro gli assi  $x$  e  $y$ . Il grafico di tale funzione per una base  $a > 1$  è riportato accanto. Il logaritmo è una funzione che cresce piuttosto lentamente, per grandi  $x$ , ed è facile verificare che (supponiamo  $a > 1$ ):

$$\begin{aligned} \lg_a x &> 0 & x &> 1 \\ \lg_a x &< 0 & x &< 1 \end{aligned}$$



Come per gli esponenziali la base più usata per i logaritmi è la base naturale costituita dal numero  $e$ ; in questo caso si usa spesso la notazione  $\ln x$  e l'indicazione della base viene omessa.

Dalla definizione di logaritmo discende la procedura per cambiare la base per gli esponenziali:

$$b^x = (a^{\lg_a b})^x = a^{x \lg_a b}$$

## 1.10 Curve

Fino ad ora le uniche curve viste erano grafici di alcune funzioni  $y = f(x)$  rappresentati in un piano cartesiano. Dal punto di vista costruttivo il grafico si ottiene in tre passi:

- 1) Ad ogni valore di  $x$  viene associato un valore della variabile  $y$  tramite la relazione  $y = f(x)$ .
- 2) Ad ogni coppia di valori  $(x, y)$  viene associato un punto  $P$  nel piano cartesiano.
- 3) Al variare di  $x$  il punto  $P$  si muove e descrive genericamente una curva.

In questa costruzione la coordinata  $x$  ha un ruolo privilegiato. Vedremo ora una maniera alternativa, e più generale, per descrivere una curva.

Intuitivamente una curva dovrebbe descrivere un sottinsieme "unidimensionale" del piano (o dello spazio) cioè deve esistere un punto  $P$  che si muove al variare di un parametro: chiameremo  $t$  questo parametro. Una curva sarà perciò una funzione da  $\mathbb{R}$  (o da un suo intervallo) nel piano (o nello spazio):

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

Cioè una coppia di numeri viene associata ad ogni valore del parametro.

Un classico esempio è quello della descrizione di un moto in un piano: in questo caso  $t$  è il tempo e le 2 funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  descrivono come variano le coordinate del punto in funzione del tempo.

Facciamo un esempio. Consideriamo una curva data da:

$$x(t) = 5.5t \quad y = 10.2 - \frac{1}{2}9.8t^2$$

nell'intervallo  $0 \leq t \leq 1$ .

Chi di voi ha studiato meccanica dovrebbe riconoscere in questa coppia di equazioni la descrizione del moto di un corpo in caduta libera. Se il tempo è misurato in secondi e le distanze in metri, il corpo è lanciato con una velocità orizzontale di 5.5 metri/sec da un'altezza di 10.2 metri.

La curva corrispondente è riportata a fianco ( lo studente provi a riprodurla ).

La definizione ora data di curva, detta curva parametrica include come caso particolare i grafici di funzioni, che in questo linguaggio equivalgono ad una curva del tipo:

$$x(t) = t \quad y(t) = f(t)$$

ma coprono anche altri casi. Ad esempio una circonferenza non può essere descritta da una sola funzione in quanto ad un valore dell'ascissa corrispondono due possibili valori dell'ordinata.

In forma parametrica una circonferenza è invece semplicemente data da:

$$x(t) = R \cos(t) \quad y(t) = R \sin(t)$$

In questo caso l'interpretazione geometrica del parametro  $t$  è data dall'angolo formato dal raggio tracciato verso il punto P con l'asse delle ascisse. Lo studente può provare a inventarsi delle figure e provare a descriverle in forma parametrica, partendo dalle figure geometriche più semplici. Come esempio di seguito è data la curva corrispondente alle equazioni:

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{2}\right) \quad y(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$$

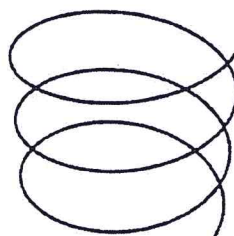
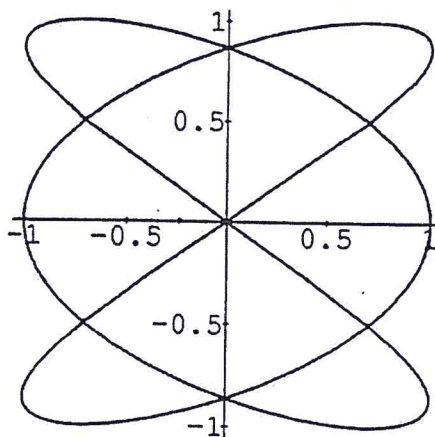
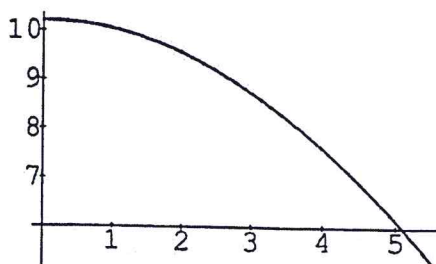
La stessa procedura può essere adottata per descrivere linee nello spazio. Logicamente in questo caso oltre alla coordinate  $x$  e  $y$  occorrerà specificare la coordinata  $z$ . Ad esempio accanto è riportata la curva ( elica ) corrispondente alle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= \cos(2\pi t) \\ y &= \sin(2\pi t) \\ z &= 2t \end{aligned}$$

Altri esempi di questo tipo di parametrizzazione verranno proposti negli esercizi.

Esiste un'altro modo per descrivere le curve detto forma implicita di una curva. Vediamo di cosa si tratta. Consideriamo ad esempio un cerchio di raggio  $R$ . Normalmente tale curva si definisce come il luogo di punti che distano  $R$  da un punto prefissato, ad esempio l'origine delle coordinate:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{ovvero} \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0$$



Questo modo di definire una curva non rientra nei casi precedenti ma è basata sulla seguente idea: l'insieme di tutti i punti  $(x,y)$  di un piano forma un insieme bidimensionale ( il piano appunto ) se si impone una condizione a tale insieme ci si aspetta di diminuire di 1 il numero di dimensioni e quindi ottenere una curva. Ora imporre una condizione ( o un *vincolo* ) significa a imporre un'equazione del tipo:

$$F(x,y) = 0$$

Ci si aspetta, e lo si può dimostrare, che se la funzione  $F$  è "ragionevole" si ottiene una curva che, a tratti, può essere descritta in una delle forme precedenti.  $F$  è una funzione del tipo:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Da questo punto di vista la curva può essere vista come l'immagine inversa dello 0 attraverso la funzione  $F$ . Esempi di questa procedura dovrebbero essere già noti. Oltre al già visto cerchio si possono considerare le iperboli, le ellissi etc.

## 1.11 Esercizi

- 1) La relazione  $y^2 = x^3$  definisce una funzione?
- 2) Fare un grafico della funzione  $y = \sqrt{x}$ . Specificare qual'è il dominio di definizione e l'immagine.
- 3) Qual'è il dominio di definizione e l'immagine della funzione  $y = \sin \frac{1}{x}$ ?
- 4) Fare un grafico della funzione  $x = \sin(\omega t)$  e dire qual'è il suo periodo.
- 5) Dato un parallelogramma di lati  $a$  e  $b$  che comprendono un angolo  $\theta$ , dimostrare che l'area del parallelogramma è  $ab \sin \theta$ .
- 6) Avete a disposizione uno strumento per misurare delle distanze ed un cannocchiale graduato che vi permette di misurare degli angoli. Volete misurare la distanza di un monte piuttosto lontano. Come potete fare?
- 7) Sapendo che il raggio della Terra è circa 6400 Km se guardate il panorama da un campanile alto 50 m, a che distanza ( sulla superficie terrestre ) sta l'orizzonte?
- 8) Supponiamo che il costo della vita aumenti del 10 per cento ogni anno. Fare una tabella del costo della vita per i primi venti anni e confrontarlo con una funzione esponenziale.
- 9) Disegnare qualitativamente un grafico per una funzione del tipo

$$x(t) = e^{-t} \cos(\omega t)$$

- 10) Considerate un'ellisse con semiasse  $a$  e  $b$ . Se ponete l'origine del sistema di coordinate nel suo centro e gli assi coordinati lungo gli assi dell'ellisse, essa sarà descritta dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Preso un punto generico  $P$  sull'ellisse chiamate  $\alpha$  l'angolo che il segmento  $OP$  fa con l'asse delle ascisse. Scrivete una forma parametrica per descrivere l'ellisse con  $\alpha$  come parametro.

- 11) Nell'ellisse dell'esercizio precedente i punti  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  con  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  si chiamano fuochi dell'ellisse. Si è supposto  $a > b$ . Dimostrare che la somma delle distanze di un punto  $P$  dai due fuochi è costante ( e vale  $2a$  ).
- 12) Sempre a proposito dell'ellisse. Prendete un sistema di coordinate centrato nel fuoco di destra e chiamate  $r$  la distanza di un punto  $P$  dell'ellisse dal fuoco e  $\theta$  l'angolo tra  $F_1P$  e l'asse delle ascisse. Scrivete l'equazione dell'ellisse esprimendo  $r$  in funzione di  $\theta$ .



- 13) Considerate il moto di un pianeta attorno ad una stella. Supponiamo per semplicità che l'orbita sia circolare. Se prendiamo come unità di misura del tempo e delle lunghezze rispettivamente il periodo di rivoluzione del pianeta ed il raggio dell'orbita il moto rispetto ad un sistema di assi centrato nella stella sarà descritto da

$$x_0(t) = \cos(2\pi t) \quad y_0(t) = \sin(2\pi t)$$

Supponiamo ora di avere altre due pianeti, il numero 1 ed il numero 2, che percorrono orbite a distanze rispettivamente del doppio e della metà del pianeta numero 0. Supponiamo anche che all'istante  $t = 0$  tutti e tre i pianeti stiano sull'asse  $x$ . Scrivere le equazioni per il moto degli altri pianeti (ricordare la 3<sup>a</sup> legge di Keplero).

- 14) Sempre nel caso precedente, come descriverebbe il moto un osservatore che sta sul pianeta numero 0? Sapreste disegnare le orbite che lui vedrebbe fare agli altri pianeti?