# Capitolo 2

# VETTORI

## 2.1 Introduzione ai vettori

In questo capitolo studieremo alcune nozioni elementari sui vettori.

Per fissare le idee consideriamo questo semplice problema: su un foglio di carta bianco un insetto, ad esempio una formica, si muove dal punto $A$ al punto $B$ ( v. Fig.1 ); vogliamo descrivere ad un nostro amico cosa sta succedendo. Lo spostamento dell'insetto si può rappresentare come una freccia che parte da $A$ e arriva a $B$.

Possiamo pensare di tracciare sul foglio un immaginario sistema di coordinate e dire al nostro amico: un oggetto di massa 5 grammi e di lunghezza 3 mm si sta spostando di 1 centimetro lungo l'asse $x$ e 1 cm lungo l'asse $y$. Quello che abbiamo fatto è di individuare lo spostamento, rappresentato dalla "freccia" $\vec{S} = \overrightarrow{AB}$ con le sue proiezioni lungo gli assi coordinati ( v.Fig.1). Se indichiamo con $S_x$ e $S_y$ gli spostamenti lungo gli assi, l'informazione trasmessa può essere codificata nella forma:

$$\begin{aligned} S_x &= 1\,\text{cm} \\ S_y &= 1\,\text{cm} \\ m &= 5\,\text{gm} \\ \ell &= 3\,\text{mm} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

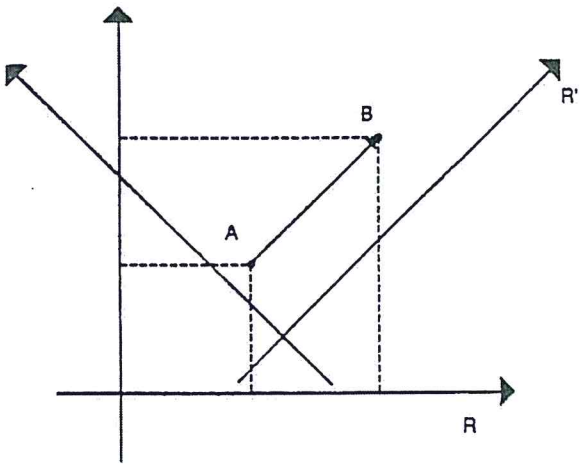



**Fig.1**

La "freccia" $\overrightarrow{AB}$ è detta *vettore spostamento* e sarà indicata con $\vec{S}$, i due numeri $S_x$ ed $S_y$ sono detti *componenti* del vettore. $\ell$ e $m$ rappresentano rispettivamente la lunghezza e la massa dell'insetto.

Notiamo innanzitutto che ci sarebbe stato un modo alternativo per dire la stessa cosa: potevamo dire di *quanto* si era spostato l'insetto e in che direzione. La direzione, ad esempio, poteva essere identificata dall'angolo tra la "freccia" $\overrightarrow{AB}$ e l'asse delle $x$. Chiamiamo $\theta$ quest'angolo. La distanza percorsa è detta *modulo* del vettore e sarà indicato con $|\vec{S}\ |$. Il teorema di Pitagora dà immediatamente:

$$|\vec{S}\ | = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{2}$$

Ricordando la definizione delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$:

$$\begin{aligned} S_x &= |\vec{S}\ | \cos\theta \\ S_y &= |\vec{S}\ | \sin\theta \end{aligned}$$

Ora da una parte è chiaro che lo spostamento in quanto tale è un unica entità, la "freccia" $\overrightarrow{AB}$, dall'altra per descriverlo abbiamo avuto bisogno di 2 numeri, $S_x$ ed $S_y$. Il nostro amico che riceve l'informazione potrebbe

insospettirsi e pensare che anche gli altri due numeri che gli abbiamo dato, $m$ ed $\ell$, siano le componenti di un vettore. Qual'è la differenza? Per deciderlo sceglie anche lui un sistema di riferimento ( $R'$ nella Fig.1 ) e fa le stesse osservazioni. Supponiamo, come in figura, che il nuovo sistema sia inclinato di 45° rispetto al vecchio sistema. Chiaramente il nostro amico trova:

$$\begin{aligned} S'_x &= \sqrt{2}\,\text{cm} \\ S'_y &= 0\,\text{cm} \\ m &= 5\,\text{gm} \\ \ell &= 3\,\text{mm} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Quindi è d'accordo su massa e lunghezza, non lo è sulle componenti $S_x$ e $S_y$. È d'accordo invece sulla lunghezza dello spostamento:

$$|\vec{S}'\,| = \sqrt{S'^2_x + S'^2_y} = \sqrt{2}$$

Il motivo del disaccordo è ovvio: nel ruotare il sistema di riferimento in senso antiorario di un angolo $\alpha$ il nostro amico ha visto ruotare nel senso opposto la freccia, quindi le componenti del vettore devono essere per forza cambiate, mentre la sua lunghezza no. In termini di angoli, ricordando la definizione ( 2.1 ) ed usando le formule di addizione per le funzioni trigonometriche, si ha:

$$S'_x = |\vec{S}\,|\cos(\theta - \alpha) = S_x \cos\alpha + S_y \sin\alpha \tag{2.3}$$

$$S'_y = |\vec{S}\,|\sin(\theta - \alpha) = -S_x \sin\alpha + S_y \sin\alpha \tag{2.4}$$

Per $\theta = \alpha = 45°$ si ottengono esattamente le componenti ( 2.2 ).

Quello che abbiamo imparato è che nel ruotare il sistema di riferimento alcune quantità, come la massa e le varie lunghezze, sono rimaste invariate, altre, come le componenti dello spostamento sono cambiate diventando una combinazione lineare delle vecchie.

Notiamo anche che il nuovo sistema di riferimento è anche traslato rispetto al veccchio, ma ciò non ha portato ad alcuna conseguenza.

Diamo allora la seguente definizione *provvisoria*:

- Chiamiamo *Scalari* gli oggetti che non cambiano per traslazione e per rotazione dei sistemi di riferimento.
- Chiamiamo *Vettori* le coppie di numeri, come $S_x$ ed $S_y$, che sono invarianti per traslazioni ma ruotano, secono le formule ( 2.3 ), per rotazione del sistema di riferimento.

Notiamo che la definizione precedente può essere facilmente generalizzata: se lo spostamento avviene in tre dimensioni occorreranno 3 numeri, $S_x$, $S_y$ e $S_z$, per caratterizzare lo spostamento. Le rotazioni saranno espresse da formule più complicate, ma di principio non cambia nulla. In uno spazio con dimensione $n$ qualsiasi, ogni vettore è individuato da una $n$-pla di numeri:

$$(S_{x_1}, S_{x_2}, \ldots, S_{x_n})$$

Ora che abbiamo rozzamente descritto le proprietà geometriche di queste nuove entità, i vettori, proviamo a vedere se si può dare una caratterizzazione algebrica delle loro proprietà. L'esercizio non è inutile ma illustra un modo di procedere: l'astrazione a livello algebrico di certe proprietà permette di solito una generalizzazione dei concetti che può non essere ovvia dal punto di vista geometrico. Detto in poche parole vogliamo studiare come si riflettono a livello algebrico sulle $n$-ple di numeri prima indicate le proprietà geometriche intuitive delle "freccie" che rappresentano i vettori. Per semplicità di notazione ci limiteremo al caso bidimensionale, ma tutte le proprietà saranno immediatamente generalizzabili al caso $n$-dimensionale.

Innazitutto è chiaro che una coppia di numeri $(S_x, S_y)$ rappresenta un vettore $\vec{S}$, deve essere possibile rappresentare allo stesso modo un *multiplo* di tale vettore. Dalla figura 1, uno spostamento multiplo di un fattore $c$ rispetto al precedente darà luogo ad un nuovo spostamento $\vec{S}' = c\vec{S}$ le cui componenti sono date da:

$$(S'_x, S'_y) = c(S_x, S_y) = (cS_x, cS_y) \tag{2.5}$$

Dalla figura 2 si vede poi che a partire da due spostamenti $\vec{A}$ e $\vec{B}$ posso costruire uno spostamento $\vec{C}$ che ha componenti:

$$\begin{aligned}(C_x, C_y) &= (A_x, A_y) + (B_x, B_y) = \\ &= (A_x + B_x, A_y + B_y) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

La costruzione indicata in figura è nota come regola del parallelogramma.
Le eq.(2.5) e (2.6) espresse in parole dicono che un multiplo di un vettore è ancora un vettore e la somma di due vettori è un vettore. Dal punto di vista algebrico possiamo allora dare le seguenti definizioni:

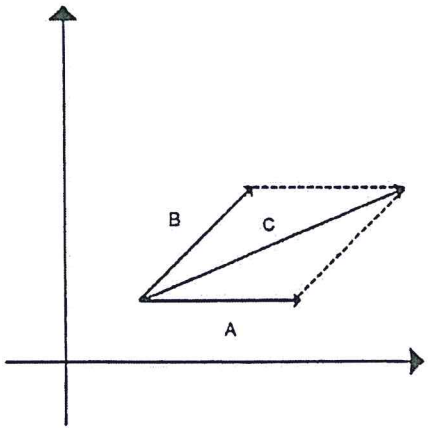



**Fig.2**

- Chiamiamo spazio vettoriale un insieme di oggetti in cui è definita l'operazione di moltiplicazione per un numero reale e l'operazione di somma.
- I vettori sono gli elementi di uno spazio vettoriale.

Questa caratterizzazione è molto flessibile e l'utilità sta nel fatto che una volta che si dimostri qualcosa in generale per uno spazio vettoriale, tale dimostrazione varrà immutata per ogni insieme di questo tipo.

Notiamo innanzitutto che i casi precedentemente illustrati, cioè gli spostamenti nel piano, sono compresi nella attuale definizione. C'è di più. Le stesse quantità "scalari", tipo massa e lunghezza rientrano nello schema, semplicemente lo spazio vettoriale associato è unidimensionale. Ad esempio è chiaro che tutti i valori delle masse possono essere ottenuti dalla massa unitaria moltiplicando per un numero reale. In generale per identificare qual'è la dimensione dello spazio vettoriale considerato occorre conoscere di quanti vettori si ha bisogno per ottenere tutti gli altri con combinazioni lineari. Ad esempio per gli spostamenti in un piano se si definisce uno spostamento unitario lungo l'asse $x$ ed uno lungo l'asse $y$:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1,0) \\ \vec{e}_2 &= (1,0)\end{aligned}$$

ogni spostamento potrà essere scritto nella forma:

$$\vec{S} = S_x\vec{e}_1 + S_y\vec{e}_2 = (S_x, S_y)$$

La definizione precisa del concetto di dimensione sarà affrontata nel corso di Geometria.

Per illustrare la generalità di quanto detto facciamo un esempio di cui non è semplice avere un'immagine geometrica, almeno a prima vista. Consideriamo le 4 funzioni, definite nell'intervallo $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= \sin x \\ f_3(x) &= \sin 2x \\ f_4(x) &= \sin 3x\end{aligned}$$

Se consideriamo l'insieme di *tutte* le combinazioni lineari del tipo:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x)$$

è chiaro che queste formano uno spazio vettoriale (lo studente lo dimostri!). In questo caso la dimensione è 4. Come si vede lo "spazio" in cui sono definiti i vettori non è l'usuale spazio euclideo ma tutte le proprietà dei vettori valgono immutate.

Un esercizio istruttivo per lo studente può essere dimostrare che i polinomi di grado $n$ formano uno spazio vettoriale, di dimensione $n + 1$.

Lo studente a questo punto potrebbe chiedersi perchè all'inizio del capitolo si è fatta tutta quella discussione geometrica se poi, in realtà, la definizione data per i vettori è stata essenzialmente algebrica. Il motivo è duplice, da un lato lo studio dei vettori dal punto di vista geometrico fornisce la base intuitiva per la formulazione astratta della loro struttura algebrica, dall'altro nell'approccio geometrico è nascosto un profondo significato fisico e matematico che ora cercheremo di illustrare in modo elementare.

In Fisica, ed in Matematica, hanno particolare importanza lo studio e la caratterizzazione delle "invarianze" insite nella descrizione di un problema.

Nell'esempio dato all'inizio del capitolo è chiaro che la descrizione del moto dell'insetto sul foglio aveva due tipi di arbitrarietà:

- L'invarianza per traslazioni: il movimento dell'insetto non dipendeva da dove si poneva l'origine del sistema di riferimento.
- Il moto non dipendeva altresì dall'orientazione del sistema di riferimento.

Per quelli di voi che hanno già visto il concetto può essere utile sottolineare il fatto che sia le traslazioni sia le rotazioni, formano un gruppo.

Quello che interessa qui sottolineare è che *qualunque* descrizione del fenomeno, in questo caso il movimento dell'insetto, deve essere formulata attraverso quantità con ben definite proprietà di trasformazione per questi cambiamenti del sistema di riferimento, altrimenti la descrizione non sarebbe formulabile in modo univoco. Questa affermazione in Fisica è lungi dall'essere banale: l'invarianza per traslazioni implica che il sistema in esame è omogeneo, l'invarianza per rotazioni che è isotropo. L'assunzione che in assenza di agenti esterni la descrizione sia omogenea ed isotropa è ovviamente importante, ad esempio esclude di considerare gli effetti che provoca sull'insetto il fatto che il foglio di carta ad un certo punto finisce. Ancora più fondamentale è il fatto che l'ordinario spazio euclideo è l'unico spazio, tridimensionale, invariante sotto queste trasformazioni e quindi assumere questa invarianza significa assumere la possibilità di descrivere i fenomeni tramite la geometria euclidea.

Per tornare a cose più pratiche è chiaro che, vista l'importanza delle rotazioni, occorrerà per prima cosa capire quali sono le strutture che si trasformano in modo "semplice" per rotazioni. Definire esattamente cosa significa semplice nella frase precedente è piuttosto complicato e probabilmente lo vedrete fra un pò di tempo.

Sicuramente le cose più semplici sono quelle che non trasformano affatto: gli *scalari*. Nello spazio euclideo gli oggetti immediatamente più complicati sono i *vettori* tridimensionali, ad esempio gli spostamenti in tre dimensioni: la loro legge di trasformazione è data da una generalizzazione della eq.(2.3). Questi sono gli enti di base su cui è costruita qualunque descrizione fisica di un problema. Per completezza diciamo che esistono oggetti leggermente più complicati, detti tensori, che sono sempre vettori dal punto di vista algebrico ma hanno proprietà di trasformazione più complicate per rotazioni. In questa sede non ce ne occuperemo.

Per finire questa sezione proponiamo un'altra visione delle relazioni illustrate fin qui, che forse può aiutare a capire la profonda connessione fra invarianze e struttura dello spazio.

Immaginiamo per un attimo che il nostro mondo sia bidimensionale, coincida cioè col foglio di carta, infinitamente grande, della formica di cui sopra. Se ci immedesimiamo con l'insetto e riformuliamo tutto quello detto prima giungiamo alle conclusioni:

1. Il nostro mondo (il foglio di carta) è bidimensionale.
2. L'ambiente è invariante per traslazioni.
3. Lo spazio è invariante per rotazioni nel piano.

Questa descrizione è logicamente ineccepibile. Vediamo cosa succede però se consideriamo un vettore *perpendicolare* al piano. Dal punto di vista della formica questo vettore è uno *scalare* infatti è chiaramente invariante per rotazioni nel piano. Consideriamo ora un vettore "obliquo" come in figura 3. Per la formica questo oggetto sarebbe costituito da un vettore bidimensionale (le due componenti x e y diciamo) e da uno scalare,

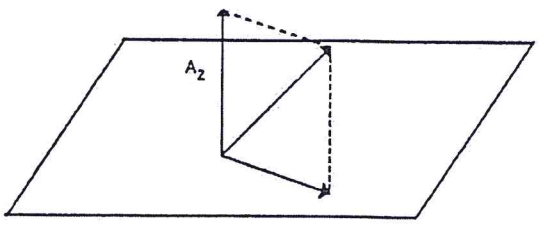



Fig.3

quella che per noi sarebbe la componente z. Quindi un unica entità, il vettore tridimensionale, sarebbe concepito in realtà come due entità completamente distinte un vettore bidimensionale ed uno scalare. Supponiamo però che fra tutte le formiche ce ne sia una più intelligente delle altre e faccia un esperimento, o una teoria, in cui il gruppo di invarianza non è più quello delle rotazioni bidimensionali ma quello delle rotazioni tridimensionali, a questo punto si accorgerebbe non solo che due oggetti prima distinti, il vettore bidimensionale e lo scalare, sono due facce della stessa entità, il vettore tridimensionale, ma, con un pò di immaginazione, arriverebbe addirittura ad affermare che in realtà il suo mondo è tridimensionale e prima stava dando una descrizione parziale del problema. Quello che è avvenuto è che la verifica di una certa struttura di invarianze, le rotazioni in questo caso, ha addirittura cambiato la dimensionalità dello spazio, nel senso che ha fatto capire alla formica che il vero spazio in cui si muoveva era tridimensionale e non bidimensionale. Per quelli di voi che hanno visto qualcosa in proposito al Liceo dovrebbe essere chiaro il paragone con quello che è successo alla Fisica con la Teoria della Relatività. Quello su cui vorremmo insistere è il fatto che lo stesso concetto di dimensione dello spazio è fondato sul fatto sperimentale di verificare o no certe invarianze.

## 2.2 Operazioni sui vettori

### 2.2.1 Prodotti scalari e vettoriali

Gli spazi vettoriali costituiscono un concreto esempio, diverso dai numeri reali, su cui provare l'efficacia dello studio astratto delle funzioni accennato al capitolo precedente. Nel paragrafo precedente abbiamo già implicitamente definito due tipi di funzioni, la moltiplicazione per numeri reali e la somma di due vettori. Nel linguaggio del primo capitolo, indicando con $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale

$$\begin{aligned} \text{Moltiplicazione}: &\quad \Re \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \\ \textit{Addizione}: &\quad \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \end{aligned}$$

Cioè la moltiplicazione per un numero associa ad una coppia di oggetti, il numero ed il vettore di partenza, un vettore risultato. Analogo ragionamento può essere fatto per la somma.

È ora interessante capire se per i vettori è possibile definire un prodotto. La prima cosa da decidere è quale deve essere il risultato di un prodotto fra due vettori. Ad esempio potrebbe essere un numero, cioè uno scalare. Per realizzare questa possibilità occorre che il risultato sia *invariante* per rotazioni. Quindi il problema è : è possibile costruire uno scalare a partire da due vettori? La risposta è si. Consideriamo infatti due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$. I due vettori individuano due rette nello spazio, sia $\theta$ l'angolo compreso fra queste rette, in altre parole l'angolo *relativo* tra i due vettori. La quantità

$$|\vec{A}\,||\vec{B}\,|\cos\theta$$

è detta prodotto scalare tra i due vettori e si indica di solito col simbolo:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\,||\vec{B}\,|\cos\theta \tag{2.7}$$

Il fatto che questa quantità sia scalare è ovvio, infatti la lunghezza dei vettori non cambia per rotazioni, e nemmeno l'angolo relativo, per rotazione girano entrambi, $\vec{A}$ e $\vec{B}$, dello stesso angolo.

Data una funzione se ne possono costruire infinite altre, ad esempio arctg log $(\vec{A}\cdot\vec{B})$. Quella scelta è l'unica però che gode di una proprietà fondamentale: è una funzione *lineare*. Per dimostrarlo notiamo che, nel piano e nello spazio il prodotto scalare può anche essere definito rispettivamente da:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \tag{2.8}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2.9}$$

Lasciamo allo studente dimostrare, ad esempio nel caso (2.8), che tale formula dà lo stesso risultato della formula (2.7). Le formule ((2.8) e (2.9) hanno il vantaggio di rendere evidenti le proprietà di linearità:

$$\left(\vec{A}_1+\vec{A}_2\right)\cdot\vec{B} = \vec{A}_1\cdot\vec{B}+\vec{A}_2\cdot\vec{B}$$

$$\left(c\vec{A}\right)\cdot\vec{B} = c\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

La definizione (2.7) è l'unica che gode di questa proprietà. Notiamo che la lunghezza di un vettore può essere espressa nella forma:

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

Ulteriori proprietà del prodotto scalari saranno oggetto degli esercizi al termine del capitolo.

Vediamo ora se è possibile fare qualcos'altro. Se ragioniamo in termini di componenti di vettori tridimensionali è chiaro che c'è dell'altro. Se consideriamo infatti i prodotti delle componenti di due vettori abbiamo nove possibilità, quindi in qualche modo i prodotti possibili di due vettori, in 3 dimensioni, devono dar ragione di 9 numeri. Finora ne abbiamo scoperto uno solo, il prodotto scalare. La possibilità successiva è quello di provare a fare un vettore. In questo modo, con le sue 3 componenti, riusciremmo a mettere a posto altre 3 possibilità.

Anche questo è possibile, benchè la risposta sia un pò più complicata della precedente, il corrispondente prodotto si chiama, ovviamente, prodotto vettoriale. La definizione è la seguente: Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, detto $\theta$ l'angolo compreso fra i due vettori, è possibile costruire un terzo vettore $\vec{C}$ detto prodotto vettoriale con le seguenti proprietà:

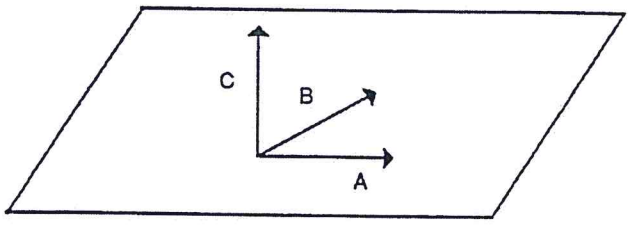



**Fig.4**

1. Il *modulo* di $\vec{C}$ è dato da :

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$$

2. La *direzione* di $\vec{C}$ è data dalla perpendicolare al piano sotteso dai due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

3. Il *verso* di $\vec{C}$ è uscente rispetto a chi osserva se per portare $\vec{A}$ su $\vec{B}$, nel modo più breve, si compie un angolo antiorario, contrario se l'angolo è orario. In poche parole se fate coincidere il vettore $\vec{A}$ col pollice della mano destra, il vettore $\vec{B}$ con l'indice, allora $\vec{C}$ è diretto come il dito medio. Un esempio è riportato in figura.

Il prodotto vettoriale viene indicato con la notazione:

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \tag{2.10}$$

La cosa non banalissima da dimostrare è che con questa complicata definizione si ha effettivamente un vettore. Una dimostrazione geometrica può essere fatta notando che il modulo definito precedentemente coincide con l'area del parallelogrammo sotteso da $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e quindi è un oggetto geometrico intrinseco, indipendente cioè dalla orientazione del sistema di riferimento. Una dimostrazione algebrica è piuttosto lunga e non sarà data. Diamo per referenza la rappresentazione del prodotto vettoriale tramite le componenti:

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned}$$

Abbiamo così visto che dei 9 possibili prodotti tra le componenti, 4 vanno a formare il prodotto scalare e quello vettoriale; si può dimostrare che gli altri 5 vanno a formare un oggetto più complicato, denominato tensore di ordine 2, con proprietà di trasformazione un pò più complicate sotto rotazione.

### 2.2.2 Base in uno spazio vettoriale

Un uso sistematico delle proprietà di linearità intrinseche nella definizione di spazio vettoriale e il concetto di prodotto scalare permettono di porre in forme standard i vettori e di renderne di solito più maneggevole l'uso.

Per fissare le idee torniamo al nostro esempio iniziale: i vettori definiti in un piano. Chiamiamo $\mathcal{V}$ lo spazio vettoriale. Ogni vettore $v \in \mathcal{V}$ è della forma:

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Sfruttando la linearità è sempre possibile scrivere tale vettore nella forma:

$$\vec{v} = v_x(1,0) + v_y(0,1) \tag{2.11}$$

I due vettori

$$\vec{e}_1 = (1,0) \tag{2.12}$$
$$\vec{e}_2 = (0,1) \tag{2.13}$$

sono detti vettori di base del nostro spazio vettoriale. Il motivo è che, come è scritto nella (2.11) attraverso una combinazione lineare di tali vettori è possibile esprimere qualunque altro vettore del nostro spazio. È possibile dimostrare che tale scrittura è unica, lo studente può accennarne una dimostrazione. Esistono infiniti modi di scegliere un insieme di vettori di base, la scelta (2.12) e (2.13) è però particolarmente comoda e tale base viene indicata come base *standard*. In Fisica i vettori di base (2.12) e (2.13) sono spesso chiamati *versori* dell'asse $x$ e $y$ rispettivamente. Ricordando la definizione di prodotto scalare si dimostra facilmente che tali vettori sono *ortogonali* fra loro:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

e che hanno lunghezza 1:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$$

Una base con queste proprietà è detta ortonormale. In questo tipo di base i coefficienti $v_x$ e $v_y$ assumono un significato particolarmente semplice, infatti sono il prodotto scalare tra il vettore $\vec{v}$ ed i vettori di base:

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_1$$
$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{e}_2$$

(La semplice dimostrazione è lasciata allo studente).

Dal punto di vista geometrico, come già detto, le componenti $v_x$ e $v_y$ rappresentano le proiezioni del vettore $\vec{v}$ lungo gli assi coordinati, che sono appunto individuati dai versori $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

La stessa notazione usata induce a generalizzare il risultato immediatamente al caso n-dimensionale. Lo studente ad esempio potrebbe scriversi esplicitamente i vettori di una base ortonormale in uno spazio a 3 o 4 dimensioni.

## 2.3 Esempi

### 2.3.1 Vettore spostamento

Abbiamo già visto che il vettore più intuitivo è quello che descrive lo spostamento di un corpo. Supponendo come al solito per semplificare di trattare un moto piano, lo spostamento da un punto A ad un punto B è un vettore bidimensionale con componenti:

$$s_x = x_B - x_A \tag{2.14}$$
$$s_y = y_B - y_A \tag{2.15}$$

Come semplice applicazione di questa definizione lo studente può provare a svolgere i seguenti esercizi:

Es.1 Un corpo si muove con un moto del tipo:

$$x(t) = 3\cos(2\pi t)$$
$$y(t) = 3\sin(2\pi t)$$

a) Di che moto si tratta?

b) Dal tempo $t = 0$ al tempo $t = 1/4$, il corpo si è spostato. Scrivere il vettore spostamento.

c)Scrivere le componenti del vettore che congiunge l'origine delle coordinate al punto.

Es.2 Un corpo si muove in linea retta. Considerando che la posizione del corpo sulla traiettoria è individuata da un vettore che parte dall'origine e arriva alla posizione del punto, sapreste scrivere l'equazione del moto, o se volete l'equazione che descrive la retta, in forma vettoriale?

Es.3Tutti avrete visto che l'equazione fondamentale della dinamica è

$$F = ma$$

le notazioni dovrebbero essere ovvie. Supponendo di sapere che l'accelerazione è un vettore, e la massa uno scalare, come si comporta la forza sotto rotazioni?

Es.4 Per gli studenti che conoscono la definizione di velocità e accelerazione: sapreste dimostrare che sono dei vettori?

### 2.3.2 Prodotti

Es.1 Prodotti scalari.

a)Scrivere il prodotto scalare dei due vettori:

$$\vec{A} = (1,1) \quad \vec{B} = (-2,5)$$

b) Che angolo hanno tra loro?

Es.2 Qual'è in forma vettoriale la condizione perchè due vettori siano ortogonali?

Es.3 Un piano nello spazio tridimensionale può essere descritto come il luogo di punti che è perpendicolare ad una retta e passa per un punto dato, ad esempio l'origine delle coordinate. Sapreste tradurre in termini di vettori questa definizione?

Es.4 Consideriamo nello spazio tridimensionale i due vettori

$$\vec{A} = (1,0,0) \quad \vec{B} = (0,2,0)$$

a)Trovare il loro prodotto scalare.

b)Trovare il loro prodotto vettoriale.

c)Sapreste dimostrare che ad esempio per rotazioni di 90° il risultato è effettivamente un vettore?

Es.5 Se il prodotto vettoriale tra due vettori è zero, cosa si può dire sulle loro direzioni?

# Capitolo 3

# Limiti e Continuità

## 3.1 Continuità

Cominceremo lo studio delle proprietà di continuità delle funzioni dall'analisi della nozione intuitiva che si ha di tale concetto. Considerate i grafici delle tre funzioni riportati sotto.

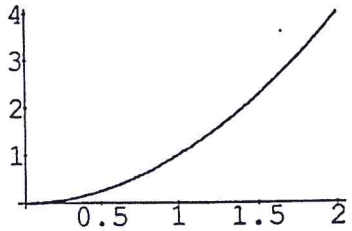



Figura 1

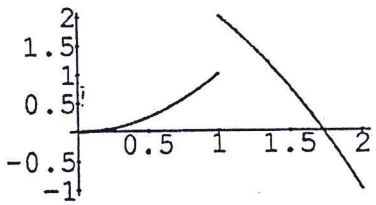



Figura 2

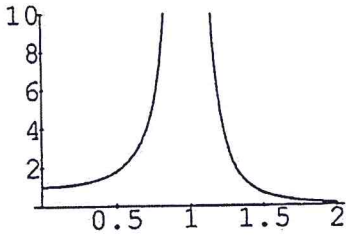



Figura 3

Anche senza aver studiato l'analisi è facile sostenere che il primo grafico rappresenta una funzione continua mentre gli altri due no. Nella figura 1 la funzione procede senza "salti", in maniera continua appunto, mentre nella figura 2 il valore della funzione ha un brusco salto per x=1. Nel terzo caso addirittura la funzione diverge per x=1. Se ci pensiamo un attimo, questo comportamento si riduce a quanto segue: nel primo caso piccoli spostamenti della variabile x corrispondono a piccoli spostamenti della variabile dipendente y. Negli altri due casi no. Per tradurre matematicamente questa asserzione occorre precisare cosa significa effettuare dei piccoli spostamenti, cioè cosa significa essere vicino a qualcosa. Per fissare le idee consideriamo una funzione da un intervallo di numeri reali $A$ in un intervallo $B$:

$$f : A \rightarrow B$$

In questo caso sia il dominio di definizione che l'immagine sono insiemi di numeri reali ed è intuitivo cosa significa che due numeri reali sono vicini: significa che la loro distanza relativa è molto piccola. Ricordiamo che sull'asse reale la usuale distanza tra due numeri $a$ e $b$ è definita da $|b-a|$. Supponiamo che ad un dato valore $x_0$ della variabile di partenza corrisponda un valore $f(x_0)$ della funzione. La funzione si dirà continua nel punto $x_0$ se, comunque si scelga un piccolo intervallo,chiamiamolo V, intorno a $f(x_0)$ si può trovare un piccolo intervallo, chiamiamolo U, intorno ad $x_0$ in modo tale che i valori della funzione in questo intervallo cadano nell'interrvallo U. Supponiamo ad esempio di considerare la funzione

$$y = 2x^2$$

Prendiamo il punto $x_0 = 1$, si ha evidentemente $f(x_0) = 2$ Scegliamo un intervallo attorno al valore 2, ad esempio $1.995 < y < 2.005$. È immediato constatare che se ad esempio considero in corrispondenza l'intervallo $0.999 < x < 1.001$ tutti i valori di $f(x)$ cadranno nell'intervallo prescelto. La continuità si riferisce al fatto che comunque piccolo scelto l'intervallo "bersaglio" si può trovare un intervallo di partenza che attraverso l'azione della funzione f va a finire dentro questo intervallo di arrivo.

Questo tipo di descrizione si può immediatamente generalizzare a qualunque insieme in cui è possibile definire la nozione di "vicinanza". Consideriamo ancora un caso relativo ai numeri reali. Consideriamo una funzione

$$f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2 \qquad f : (x, y) \rightarrow (u = x^2, v = y^2)$$

Questa funzione associa ad ogni *coppia* di numeri un'altra coppia ottenuta elevando al quadrato i numeri di partenza, abbiamo chiamato $u$ e $v$ le coordinate nel piano immagine. In questo caso la distanza, sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo è data dall'usuale teorema di Pitagora, dati due punti $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ la loro distanza è definita da $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Consideriamo il punto (1,2), la sua immagine è data dal punto $(u = 1, v = 4)$. In questo caso la continuità significherà che scelto a piacere un piccolo cerchio di raggio $R$ attorno al punto immagine:

$$(u - 1)^2 + (v - 4)^2 < R^2$$

è possibile trovare un cerchio di raggio $r$ nel piano di partenza tale che se il punto di partenza è nel cerchio:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 < r^2$$

allora l'immagine è contenuta nel cerchio del piano $(u, v)$. Dovrebbe essere chiaro che anche in questo caso la funzione è continua.

Da tutto quello che abbiamo detto dovrebbe essere chiaro che se una funzione è continua in un certo punto $x_0$ , mano a mano che la variabile x si avvicina a tale punto il valore della funzione si avvicina al valore $f(x_0)$. Questa affermazione di solito si scrive nella forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione che gode di questa proprietà si chiama continua.

Lo studente che ha già studiato queste cose avrà notato che non abbiamo esplicitamente usato affermazioni del tipo "per ogni $\varepsilon$ esiste un $\delta$ tale che" che di solito si incontrano nello studio di queste cose. Questa scelta non è dovuta semplicemente al desiderio di non appesantire la presentazione con troppi dettagli tecnici ma è stata fatta per illustrare un aspetto fondamentale del problema. Il concetto di continuità non è una cosa assoluta ma è strettamente legato a come si definisce la nozione di vicinanza, cioè se si cambia tale nozione nello spazio di arrivo o di partenza cambiano le funzioni continue. Non solo, il legame è così stretto che si possono definire funzioni continue su qualsiasi tipo di insiemi, non solamenti numeri reali, basta definire cosa significa essere vicini. Nel corso di Analisi lo studente potrà approfondire questo argomento, ma è importante non avere preconcetti su cose così basilari.

Torniamo alle funzioni sui numeri reali. Avendo definito cosa significa per una funzione essere continua in un punto è ovvio che una funzione si definirà continua in un intervallo se è continua in tutti i punti di questo intervallo.

## 3.2 Limiti ed estendibilità delle funzioni

Ci limiteremo allo studio di funzioni di una variabile reale. Spesso alcune funzioni non sono definite per particolari valori della variabile. I casi più frequenti sono due:

1. La funzione non è definita in tutto un intervallo di valori. Ad esempio la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ non è definita, nel campo reale, per valori di x compresi nell'intervallo $-1 < x < 1$. In questo caso il possibile prolungamento della funzione al di fuori del campo originario di definizione è in larga misura arbitrario. Una notevole eccezione è data dalle funzioni di variabile complessa che lo studente incontrerà nel corso di Analisi.

2. La funzione non è definita per un particolare valore di x ma è definita per tutti i valori che sono intorno ad x. Ad esempio la funzione $f(x) = 1/x$ non è definita per $x = 0$ ma è definita per tutti i valori $x \neq 0$.

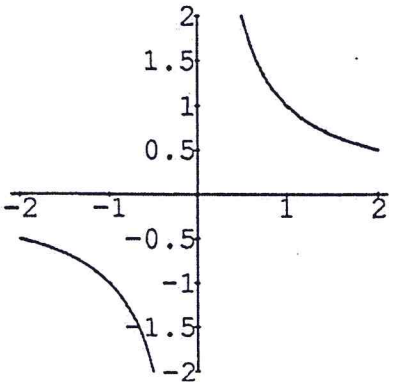
Il secondo caso è quello che studieremo. La prima domanda da farsi è: qual'è il comportamento della funzione nelle vicinanze del punto $x_0$ in cui non è definita ? Consideriamo proprio il caso $f(x) = 1/x$ nell'intorno dello 0. Possiamo ad esempio avvicinarsi a 0 considerando dei valori di x sempre più piccoli del

tipo: $x_1 = 1$ , $x_2 = 1/10$ $x_3 = 1/100\ldots$ Si osserva facilmente che tanto più ci si avvicina allo zero tanto più grande è il valore della funzione. Parafrasando il linguaggio del paragrafo precedente comunque grande scelgo un numero N posso scmpre sceglier un valore di x sufficientemente piccolo in modo tale che $f(x)$ sia maggiore di questo numero.

Nello stesso modo se ci si avvicina al punto $x = 0$ con numeri sempre più piccoli ma negativi il valore delle funzione decrescerà sempre di più. Questo tipo di situazione si descrive nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

I simboli $0^+$ e $0^-$ indicano l'avvicinamento al limite che si fa, rispettivamente, da destra e da sinistra. Il grafico della funzione è riportato accanto e come ci si aspetta descrive una funzione discontinua per $x = 0$.



Funzione 1/x

Notiamo che la funzione ha due patologie per $x = 0$. Da un lato non esiste il limite per $x \to 0$ ( $\infty$ non è un numero reale ), dall'altro anche se si volesse descrivere il comportamento della funzione come l'avvicinamento ad un astratto "punto all'infinito" il comportamento sarebbe lo stesso patologico perchè dipenderebbe dal fatto se ci si avvicina a $x = 0$ da destra o da sinistra. Dalla discussione del paragrafo precedente è ovvio che se il limite esiste, questo deve essere sempre lo stesso qualunque sia la direzione di avvicinamento.

Es.1 Applicare la procedura appena illustrata allo studio della funzione $f(x) = 1/(x^2 - 1)$. Individuare i punti in cui non è definita, studiare i limiti e farne un grafico.

All'analisi fatta precedentemente sembrerebbe presentarsi una scappatoia. È vero che la funzione $1/x$ non è definita nello zero, ma niente impedirebbe di "estendere" il campo di definizione definendo la funzione come:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

In effetti tale definizione è corretta ma serve a poco: si avrebbe lo stesso:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(x_0)$$

Cioè la funzione non è estendibile con continuità. Questo concetto è utile in molti casi. Supponiamo di considerare la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Questa funzione non è definita per x=0. Infatti nello 0 assume la forma indeterminata 0/0. Con un piccolo ragionamento di geometria sul cerchio trigonometrico è facile però verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

In tal caso si può definire la funzione nello 0 come $f(0) = 1$ ed ottenere una funzione continua. Riassumendo considerato un punto $x_0$ in cui la funzione non è definita, se esiste il limite per $x \to 0$ di f(x) si può definire tale limite come il valore della funzione nel punto considerato ed ottenere una funzione continua. In caso contrario, se cioè il limite non esiste la funzione non è estendibile con continuità nel punto $x_0$.

Spesso però è proprio il comportamento delle funzioni intorno a questi punti di discontinuità che rivela alcune caratteristiche qualitative delle funzioni stesse, quindi analizzeremo ancora qualche tipico esempio per avere un minimo di casistica.

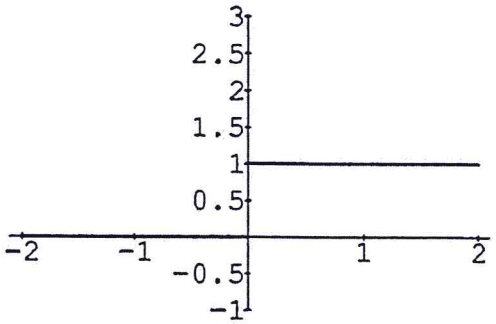
Il "prototipo" di funzione discontinua è la seguente funzione ( detta di Heaviside ):

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Il grafico di tale funzione è riportato accanto. Si noti che la funzione è in questo caso definita per $x = 0$ ( vale 1 ) ma è chiaro che in questo punto fa un salto, per la precisione:

$$\lim_{x \to 0+} H(x) = 1$$
$$\lim_{x \to 0-} H(x) = 0$$

Il limite chiaramente non esiste e quindi la funzione è discontinua per $x = 0$

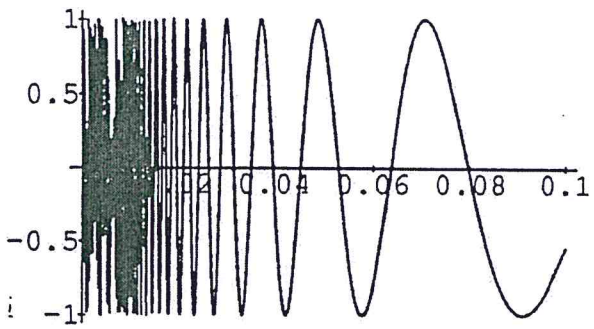


Funzione H(x)

Possono esistere chiaramente dei casi molto più patologici. Consideriamo per esempio la funzione

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

nell'intorno di x=0. Man mano che x diminuisce l'argomento del seno cresce sempre più, ora questa funzione è periodica ed al crescere del suo argomento oscilla continuamente fra +1 e -1, quindi il limite per $x \to 0$ non esiste.



Funzione sin(1/x)

Passiamo ora a studiare il comportamento delle funzioni per grandi valori della variabile indipendente x. Consideriamo di nuovo $f(x) = 1/x$ è chiaro che scegliendo dei valori di x sempre più grandi il valore della funzione decresce sempre di più e " al limite"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

È interessante rivedere questo esempio nel linguaggio del paragrafo precedente. È vero che i punti $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali però è intuitivo che possiamo in astratto definire formalmente un insieme esteso della retta reale attaccando alle "estremità" questi due punti. Il problema è come si definisce il concetto di "vicino" per questi punti ? Nel caso di un punto normale sulla retta possiamo definire, attorno a questo punto dei segmenti sempre più piccoli, ad esempio di lunghezza $1/2, 1/4, 1/8 \ldots$ in modo tale da caratterizzare l'approccio a tale punto. Nel caso del punto all'infinito basta definire l'analogo di questi segmenti. È naturale definirli come delle semirette di numeri sempre crescenti, ad esempio a partire da $2, 4, 8, \ldots$ : un numero starà tanto più vicino all'infinito tanto più è contenuto in una semiretta caratterizzata da un numero grande. In questo linguaggio la scrittura:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c$$

significa che preso un intorno comunque piccolo di c nell'immagine della funzione f posso trovare un numero M ( cioè un intorno del punto all'infinito ) tale che se $x > M$ allora $f(x)$ è contenuto nell'intorno assegnato di c.

Es.1 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{x - 1}$$

e fare un grafico della funzione.

Es.2 Supponiamo di avere una funzione definita su un piano. Come definirebbe lo studente un punto all'infinito ed i suoi intorni ?

## 3.3 Esempi

### 3.3.1

Consideriamo un semplice problema fisico per mostrare come si può guardare alla descrizione matematica di un evento, avendo appreso ad immaginare il comportamento "al limite" delle funzioni.

Un corpo di massa $m_1$ che si muove con velocità $v$ urta frontalmente un corpo di massa $m_2$ inizialmente fermo. L'urto è elastico.

L'avverbio *frontalmente* indica che il moto si svolge lungo la stessa retta, prima e dopo l'urto.

Nell'urto si conserva la quantità di moto totale ( ovvero la somma delle quantità di moto dei due corpi è la stessa prima e dopo l'urto ) e si conserva l'energia cinetica ( abbiamo supposto l'urto elastico ).

Valgono dunque le due uguaglianze:

$$\begin{aligned} m_1 v &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{m_1 v^2}{2} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$v_1$ e $v_2$ sono le velocità dopo l'urto.

Lasciamo come esercizio la soluzione del sistema di secondo grado in due incognite. Una soluzione è:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \\ v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \end{aligned}$$

(Esiste un'altra soluzione, lo studente la trovi e ne dia un'interpretazione fisica). Riscrivendo i coefficienti dipendenti dalla massa in termini del rapporto adimensionale $x = m_2/m_1$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{1-x}{1+x} v \\ v_2 &= \frac{2}{1+x} v \end{aligned}$$

Naturalmente il rapporto $x$ è importante per determinare le modalità dell'urto, pensate allo scontro di un autocarro con una mosca ferma o il contrario.

Si trova che quando il rapporto è grande, ossia quando la mosca urta contro il camion fermo ( al limite per $x \longrightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} v_1(x) &= -v \\ \lim_{x \to \infty} v_2(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ossia il bersaglio, di massa grande, tende a rimanere fermo e il proiettile, di massa piccola, inverte la sua velocità.

Se il rapporto è piccolo ( $x \longrightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} v_1(x) &= v \\ \lim_{x \to 0} v_2(x) &= 2v \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se le masse sono uguali:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} v_1(x) &= 0 \\ \lim_{x \to 1} v_2(x) &= v \end{aligned} \tag{3.4}$$

ossia il proiettile si ferma ed il bersaglio parte con la stessa velocità che aveva il proiettile.

Essendo le funzioni continue il limite è calcolato banalmente negli ultimi due casi e la scrittura può apparire ridondante ma in realtà è comoda per per capire ad esempio cosa succede se le due masse invece di essere uguali sono un pó diverse. Lo studente può continuare i analisi o, meglio ancora, provare ad immaginare dei casi analoghi.

### 3.3.2

Consideriamo una carica elettrica unitaria posta in un punto che individuiamo con $x = 2$ su una retta di riferimento. La forza che essa esercita su una carica uguale posta nel punto generico $x$ è data dalla legge di Coulomb:

$$F(x) = \frac{k}{(x-2)^2}$$

Evidentemente

$$\lim_{x \to 2} F(x) = +\infty$$

ossia l'intensità della forza cresce illimitatamente ( diverge ) quando la distanza delle due cariche tende a 0.

## 3.4 Funzioni continue e limiti

Cominciamo questo paragrafo col verificare che le funzioni che si usano più spesso sono funzioni continue, passeremo poi a studiare cosa succede quando questo tipo di funzioni viene combinato con delle procedure di limite.

Consideriamo la funzione "somma":

$$+ : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R} \qquad +(x,y) = x + y$$

Questo modo di vedere la somma di due numeri è già stato introdotto nel Cap.1. È facile dimostrare che la somma è una funzione continua. Consideriamo infatti un punto $(x_0, y_0)$ la sua immagine sarà data da $z_0 = x_0 + y_0$. Consideriamo ora un qualunque intorno, cioè un piccolo intervallo attorno all'immagine, cioè, ad esempio i numeri del tipo:

$$z_0 - \varepsilon < z < z_0 + \varepsilon$$

occorre dimostrare che si può sempre trovare un intorno del punto di partenza, $(x_0, y_0)$ , la cui immagine sia contenuta nell'intervallo. È immediato verificare che se si prendono tutti i punti contenuti in un piccolo quadrato di lato, ad esempio, $\varepsilon/2$ e centrato in $(x_0, y_0)$:

$$x_0 - \frac{\varepsilon}{2} < x < x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad y_0 - \frac{\varepsilon}{2} < y < y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$$

l'immagine di questo intorno è tutta contenuta nell'intervallo in questione, cioè $|x + y - z_0| < \varepsilon$, quindi la funzione somma è continua.

Lasciamo allo studente l'analoga dimostrazione della continuità del prodotto e della divisione ( in tutti i punti in cui il denominatore non si annulla ).

Abbiamo quindi dimostrato che le normali operazioni algebriche sono continue.

La proprietà seguente è fondamentale:

**Teorema 1** *Se $f : A \to B$ è una funzione continua in $A$, e $g : B \to C$ è una funzione continua in $B$, anche la composizione delle due $g \circ f : A \to C$ è continua.*

La dimostrazione è molto semplice. Diamo un nome ai punti $f(a_0) = b_0$ e $g(b_0) = c_0$, $g \circ f(a_0) = c_0$. Poichè $g$ è continua, dato un intorno $U_c$ di $c_0$ esiste un intorno $U_b$ di $b_0$ tale che $g(U_b) \subset U_c$. D'altronde poichè $f$ è continua esiste un intorno $U_a$ tale che $f(U_a) \subset U_b$. Ma allora $g \circ f(U_a) \subset U_c$ cioè $g \circ f$ è una funzione continua.

Questo teorema permette automaticamente di affermare:

- Se $f$ e $g$ sono continue allora $f + g$ è continua.
- Se $f$ e $g$ sono continue allora $f \cdot g$ è continua.

- Se $f$ e $g$ sono continue allora $f/g$ è continua in tutti i punti in cui $g \neq 0$

Queste affermazioni discendono imediatamente dal fatto che ad esempio, $f+g$ è la composizione di funzioni continue ( $f$ e $g$ ) con la somma.

Le proprietà precedenti si estendono immediatamente ai limiti. Notiamo innanzitutto che se $f(x)$ è una funzione continua, allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

Cioè se la funzione è continua, questa "commuta" con l'operazione di limite. Poichè la somma i prodotti etc. sono funzioni continue, se poniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) &= (\lim_{x\to x_0} f(x)) + (\lim_{x\to x_0} g(x)) \\
\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) &= (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x)) \\
\lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)}) &= \frac{(\lim_{x\to x_0} f(x))}{(\lim_{x\to x_0} g(x))}
\end{aligned}$$

Cioè il limite della somma è uguale alla somma dei limiti etc. Ovviamente le affermazioni precedenti valgono quando i limiti esistono e, nel caso della divisione, quando il denominatore non è nullo.

Queste semplici proprietà ed il teorema precedente sulle composizioni delle funzioni permettono di studiare praticamente tutte le funzioni con cui avrete a che fare: in effetti si è già fatto osservare che funzioni complicate normalmente sono semplicemente il prodotto della composizione di funzioni più semplici.

Da queste semplici procedure sono per il momento esclusi limiti che portano ad espressioni indeterminate, del tipo $0/0$ o $0\cdot\infty$. Alcuni semplici casi come ad esempio:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

sono già stati incontrati e dovreste essere in grado di trattarli. Casi più complicati saranno trattati nel corso di Analisi.

## 3.5 Derivate

Il concetto di derivata trae origine dallo sforzo di caratterizzare a livello locale le caratteristiche di una funzione. Facciamo qualche esempio in modo da illustrare alcuni tipici contesti in cui compaiono le derivate.

1. Supponiamo di percorrere un tratto di strada e di sapere ad ogni istante t quanta strada si è percorsa $s(t)$. Come si fa a sapere a che velocità si va?

2. Se conosciamo una certa funzione $y = f(x)$ e ne facciamo un grafico può essere interessante conoscere la pendenza della curva ottenuta (ad es. questa curva può rappresentare il profilo di un monte, oppure il tasso di inflazione in funzione dei giorni dell'anno e si vuole conoscere come cresce questo tasso etc.)

3. Supponiamo di conoscere il valore di una funzione in un punto ad es. $\sqrt[3]{1} = 1$, si può calcolare approssimativamente il valore della funzione vicino al punto dato (es. $\sqrt[3]{1.1}$?

Consideriamo in dettaglio l'esempio della velocità. Supponiamo di viaggiare in macchina e percorrere 100 Km in un'ora. È chiaro che "in media" abbiamo viaggiato a 100 Km/h. (Ricordiamo che le velocità è il rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo). Questa informazione, benchè corretta è indubbiamente parziale. Ad esempio potremmo aver viaggiato sempre alla stessa velocità oppure, ad esempio, avere fatto mezza ora di sosta ed aver viaggiato per il resto del tempo a 200 Km/h (con conseguente multa). Oppure a causa del traffico potremmo avere rallentato e poi accelerato, etc. Da cosa sono caratterizzate queste varie situazioni? La schematizzazione del problema sembra semplice, ed è semplice: basta dire quanto spazio si è percorso ad un dato istante del tempo, costruire cioè una *funzione* $s(t)$ che ad ogni istante t specifichi lo spazio percorso. Rimane il problema di capire a che velocità si sta viaggiando. La risposta è ovvia: basta guardare all'istante prescelto il tachimetro, basta ora schematizzare l'azione del tachimetro. Torniamo al punto di partenza. Nel dire che la velocità media era di 100 Km/h non c'è niente di sbagliato,

semplicemente non si è tenuto conto di come variava la funzione (ricordiamo:$s(t)$) nell'intervallo di tempo considerato. Se l'intervallo di tempo fosse però piccolo, diciamo un minuto, le possibilità di errore sarebbero più piccole (è difficile fare delle soste di mezzo minuto). Se fosse ancora più piccolo, diciamo un decimo di secondo, potrei anche trascurare gli errori dovuti al fatto che inavvertitamente si può premere il pedale dell'acceleratore, etc. In conclusione se si misura lo spazio ad un certo tempo $t_1$ e si ottiene un valore $s(t_1)$, poi si misura lo spazio ad un tempo molto vicino a $t_1$, diciamo $t_1 + \Delta t$, si otterrà $s(t_1 + \Delta t)$, il prefisso $\Delta$ comparirà spesso nel seguito e sta ad indicare una quantità piccola. La velocità dovrebbe essere definita dallo spazio percorso $s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)$ diviso il tempo impiegato a percorrerlo $\Delta t$. La situazione ideale sarebbe quella in cui questo $\Delta t$ fosse piccolo a piacere, si è perciò portati a definire la velocità ad un certo istante come

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$$

La formula precedente si chiama **derivata della funzione s rispetto a t**, calcolata nel punto $t_1$ in questo caso.

Ragioniamo per un momento in astratto per generalizzare la costruzione precedente. Consideriamo una funzione $f(x)$, si definisce **derivata della funzione f nel punto x** il limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.5}$$

Tale definizione ovviamente ha senso se il limite esiste (nel qual caso la funzione si dice derivabile), in questo caso la derivata si indica con una delle seguenti notazioni:

$$\frac{df}{dx} \qquad f'(x)$$

Come vedremo in seguito non tutte le funzioni sono derivabili perchè il limite precedente potrebbe non esistere. Notiamo alcune cose:

1. Nell'espressione 3.5 occorre **calcolare** il limite. Non si può semplicemente sostituire $\Delta x$ con zero, si otterrebbe l'espressione indeterminata 0/0.

2. Nell'espressione 3.5 il denominatore tende a zero, l'unica speranza di avere un risultato finito è che *anche* il numeratore si annulli nel limite $\Delta x \to 0$, cioè deve essere:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

   La funzione f **deve** essere continua (è una condizione necessaria, anche se non sufficiente per l'esistenza della derivata).

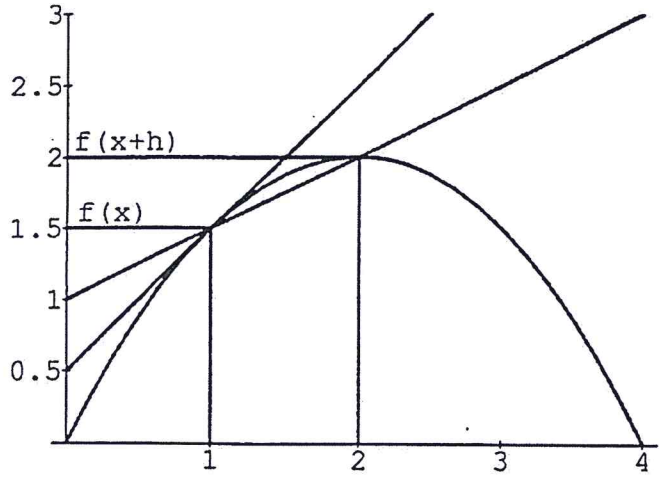
Il calcolo del limite 3.5 è più facile di quanto possa apparire a prima vista. Notiamo infatti che funzioni complicate possono essere costruite a partire da semplici espressioni come polinomi, funzioni trigonometriche etc. con alcune procedure standard:

- **Somme**, es.: $\sin(x) + x^2$
- **Prodotti**, es.: $\frac{1}{x}\cos(x)\ln(x)$
- **Funzioni composte**, es. $\sin^2(x)$ ; $\sin(e^x)$
- etc.

L'idea è quella di calcolare esplicitamente le derivate per le strutture semplici e quindi capire come l'operazione di derivata si comporta rispetto alle varie regole di composizione.

## 3.6 Interpretazione geometrica

Consideriamo il grafico




Rapporto incrementale

Il coefficiente angolare della retta che passa per $P = (x, f(x))$ e $P' = (x+h, f(x+h))$ è dato dal rapporto:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.6}$$

Questo rapporto prende il nome di **rapporto incrementale.**

Tenendo fisso $P$ facciamo tendere $P'$ a $P$, ciò significa far tendere $h$ a 0 nel rapporto scritto sopra. Il limite suddetto è la **derivata** della funzione $f(x)$ nel punto x e si indica :

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Riferendoci al grafico precedente il limite del rapporto incrementale, ossia il limite del coefficiente angolare della retta passante per $P$ e $P'$ tende, al tendere di $P'$ a $P$, al coefficiente angolare della retta tangente in $P$.

Quindi la derivata di una funzione $f(x)$ nel punto $x$ può essere interpretata geometricamente come il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x, f(x))$.

Come già accennato nel paragrafo precedente, poichè il denominatore del rapporto incrementale tende a zero, anche il numeratore deve tendere a zero:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

cioè la funzione deve essere continua. Che questa sia una condizione necessaria ma non sufficiente è particolarmente chiaro in questa descrizione geometrica. Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$. Questa funzione è chiaramente continua per $x = 0$ ( non fa salti ), ma in tale punto non è derivabile, infatti:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = -1$$

Quindi il limite non esiste. In effetti se si disegna il grafico della funzione ci si rende immediatamente conto che nel punto $x = 0$ non esiste la tangente al grafico.

## 3.7 Proprietà delle derivate

L'operazione di derivata in generale associa ad una data funzione $f(x)$ un'altra funzione, detta appunto derivata, $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La proprietà fondamentale della operazione di derivata è quella di essere un'operazione **lineare**. Questo significa:

1. La derivata della somma di funzioni è uguale alla somma della derivate:

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \tag{3.7}$$

2. Se $c$ La derivata di una funzione per una costante è uguale a tale costante per la derivata della funzione:

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df}{dx}$$

Le proprietà precedenti discendono immediatamente dalle proprietà già viste di linerità per i limiti, comunque se si vogliono dimostrare basta scrivere, ad esempio:

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \tag{3.8}$$

Prendendo il limite per $h \to 0$ dell'uguaglianza precedente, il primo termine tende alla derivata della somma delle funzioni $f$ e $g$, l'ultimo alla somma delle derivate. Analogamente si può procedere per il caso (2.).

Quello che abbiamo visto finora è la composizione della derivata rispetto alla somma di due funzioni. È naturale chiedersi come si comporta la derivata rispetto al prodotto ed alla divisione.

Poniamo

$$P(x) = f(x)g(x)$$

Vogliamo vedere se si può calcolare la derivata di $P(x)$ una volta conosciute le derivate di $f$ e $g$. Si ha:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\ &= \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \end{aligned}$$

La formula precedente, che riscriviamo:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{3.9}$$

risponde quindi alla domanda.

Il passo successivo è determinare la derivata del reciproco di una funzione data:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)}$$

La procedura è semplice:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\frac{1}{f(x+h)f(x)} = -\frac{1}{f^2(x)}f'(x) \tag{3.10}$$

Dalle espressioni precedenti è immediato ricavare l'espressione per la derivata di un rapporto ( lo studente faccia l'esercizio ):

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{3.11}$$

Da queste proprietà si possono ricavare le espressioni per le derivate delle funzioni più semplici. Lo studente è invitato a riprodurre la tabella indicata a lato. Dai risultati precedenti, sfruttando la linearità dell'operazione di derivata, è possibile ricavare la derivata di una qualsiasi funzione razionale ( data cioè dal rapporto di due polinomi.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| cost. | 0 |
| $x$ | 1 |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $1/x$ | $-1/x^2$ |

È anche piuttosto semplice costruire le derivate delle funzioni trigonometriche. Ricordiamo innanzitutto il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{3.12}$$

Da questo limite si ricava facilmente che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

Chiamiamo infatti $L$ tale limite, si ha:

$$\begin{aligned} 2L &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}(\cos x+1)= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x=0 \end{aligned}$$

Consideriamo ora la derivata della funzione $f(x)=\sin x$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-sinx}{h}=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos x$$

Allo stesso modo è facile dimostrare che :

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

Funzioni più complicate di quelle viste finora si formano componendo funzioni elementari, è perciò necessario capire come si comporta la derivata rispetto alla composizione delle funzioni. Supponiamo di avere due funzioni $f$ e $g$ tali che:

$$y=f(x)\qquad z=g(y)\qquad z=g\circ f(x)\equiv z(x)$$

Il nostri scopo è calcolare la derivata della funzione composta. Procederemo in modo euristico. Indichiamo con $\Delta x$, $\Delta y$ etc. gli incrementi delle varie variabili ( cioè quello che prima chiamavamo $h$ ). Si può scrivere:

$$\frac{dh}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3.13}$$

Ora poichè le funzioni sono derivabili singolarmente, per ipotesi, quando l'incremento della variabile indipendente tende a zero, anche quello della variabile dipendente tende a zero, si ha:

$$\frac{dh}{dx}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=g'(y)f'(x)$$

Cioè la risposta è molto semplice: la derivata di una funzione è composta è la derivata normale moltiplicata per la derivata dell'argomento di tale funzione rispetto all'argomento della derivata. Per essere espliciti supponiamo di voler calcolare la derivata della funzione $\sin x^2$, cioè la funzione sin che ha come argomento $x^2$ Per la derivata si ha:

$$\frac{d}{dx}\sin x^2=(\cos x^2)\cdot 2x$$

Viceversa per il quadrato della funzione $\sin(x)$:

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x=2\sin x\cos x$$

Un'ultima azione da analizzare sulle derivate è l'operazione di funzione inversa. Supponiamo di conoscere la derivata di una data funzione $y = f(x)$, vogliamo calcolare la derivata della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$. Formalmente si può procedere nel seguente modo:

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Ricordando che come al solito $\Delta x$ e $\Delta y$ vanno a zero contemporaneamente:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

Consideriamo ad esempio la funzione $y = \sqrt{x}$. Questa è l'inversa della funzione $x = y^2$ ( almeno localmente ) e si ha perciò :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Allo stesso modo è facile dimostrare che :

$$\frac{d}{dx} x^{1/n} = \frac{1}{n} x^{1/n-1}$$

Dalle proprietà viste discende che per qualsiasi potenza razionale deve valere

$$x^{p/q} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$$

È facilmente immaginabile che la relazione precedente debba valere anche se l'esponente non è razionale ed in effetti è vero, una dimostrazione seguendo un'altra procedura è data più avanti.

Delle funzioni elementari che abbiamo studiato nel capitolo precedente ancora non abbamo preso in considerazione gli esponenziali ed i logaritmi. Diamo qui il risultato principale senza dimostrazione:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \tag{3.14}$$

Nella formula precedente $e$ è la base dei logaritmi naturali ( $e = 2.7828\ldots$ ). La formula precedente chiarisce perchè la base naturale è così importante: la funzione $e^x$ è ( l'unica ) funzione che si autoriproduce attraverso l'operazione di derivata. Per quanto riguarda i logaritmi basta ricordare che non sono altro che l'inverso della funzione esponenziale per dimostrare che:

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

Lo studente è invitato a dimostrare la formula precedente ed ad estenderla nel caso di logaritmi in una base diversa da quella naturale.

Prima di concludere l'argomento ritorniamo alla funzione $x^\alpha$ dove $\alpha$ è un generico numero naturale. Per la derivata si può scrivere:

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d'}{dx} e^{\alpha \log x} = e^{\alpha \log x} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

che è il risultato che avevamo preannunciato.

A fianco presentiamo una tabella riassuntiva con le derivate delle funzioni elementari trattate finora. La derivata di funzioni arbitrariamente complicate, ottenute tramite composizione di un numero finito di tali funzioni, possono essere calcolate utilizzando le semplici regole esposte precedentemente.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| *cost.* | $0$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\log x$ | $\frac{1}{x}$ |

## 3.8 Derivate e approssimazione di funzioni

Il problema che vogliamo affrontare in questo paragrafo è il seguente. supponiamo di considerare una funzione $f(x)$ e di conoscerne il valore in un certo punto $x_0$. Vogliamo stimarne il valore per valori di $x$ vicini ad $x_0$. La rappresentazione grafica di questo problema ci dà immediatamente la chiave per risolverlo. Nel grafico precedente, si conoscono le coordinate del punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ vogliamo calcolare le coordinate di un punto vicino $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)$. Se si traccia una retta tangente al punto $P_0$ e si calcola l'ordinata di tale retta corrispondente all'ascissa $x_0 + \Delta$ si otterrà un valore approssimato del valore della funzione. La retta considerata ha equazione:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Quindi approssimativamente si avrà

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

La formula precedente risolve il problema, chiaramente, ricordando la definizione di derivata, tale formula sarà tanto più precisa tanto più piccolo è $\Delta x$.

La costruzione geometrica precedente può anche essere spiegata nel modo seguente. Il grafico di una funzione $f(x)$ è genericamente una curva complicata, ma, nell'intorno di un dato punto $P_0$ può essere approssimata da una retta ( immaginate di guardare la curva al microscopio, man mano che ingrandite l'intorno di $P_0$ le disuniformità della curva spariscono ). Ora è chiaro che fra tutte le rette possibili che approssimano la curva la retta tangente è la migliore possibile. Infatti consideriamo una generica retta che passa per il punto in questione:

$$y(x) = f(x_0) + c(x - x_0)$$

Vogliamo determinare $c$ in modo tale che la differenza fra la retta e la curva si annulli quando $x \to x_0$, cioè deve essere:

$$\lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0) + c(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = 0$$

Ricordando la definizione di derivata si ha $c = f'(x_0)$ e quindi si riottiene la curva tangente.

I ragionamenti precedenti potrebbero essere resi rigorosi ma ci accontentiamo di questa descrizione intuitiva.

Questo tipo di risultato ha un'immediata applicazione. Supponiamo ad esempio di voler calcolare la radice cubica di 1.1: $(1.1)^{1/3}$. La funzione in esame è $f(x) = x^{1/3}$. Si conosce il valore della funzione per $x = 1$. Si può perciò scrivere:

$$f(1.1) = f(1 + 0.1) = f(1) + f'(1)0.1$$

Ora ricordando il risultato del paragrafo precedente:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(1) = \frac{1}{3}$$

Si ha perciò approssimativamente:

$$f(1.1) \simeq 1.033$$

Il risultato con l'approssimazione di tre cifre decimali è 1.032 e quindi si è fatto un errore di una parte su mille, abbastanza piccolo.

Lo studente può utilmente verificare ( utilizzando qualche altro metodo, ad esempio un piccolo calcolatore ) che l'approssimazione migliora nel caso di $(1.01)^{1/3}$ e va ancora meglio per $(1.001)^{1/3}$.

La discussione precedente dà anche la chiave per migliorare l'approssimazione. Abbiamo scelto come approssimante di una funzione una retta, il passo successivo è quello di scegliere una parabola, poi una cubica etc. Anche questi passaggi possono essere espressi tramite le derivate come lo studente studierà nel corso di Analisi.

## 3.9 Massimi e minimi di funzioni

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che localmente la derivata permette di approssimare una funzione tramite una retta, la retta tangente alla curva. La derivata è il coefficiente angolare di tale retta. È chiaro

da quello che abbiamo detto che se in un certo punto la derivata è positiva la funzione nell'intorno di tale punto è una funzione crescente, se la derivata è negativa la funzione è decrescente ( lo studente saprebbe dare una dimostrazione formale di questo fatto? ). I punti in cui la derivata si annulla rappresentano dei punti in cui la tangente al grafico è tangente all'asse orizzontale. Si hanno quattro casi possibili:

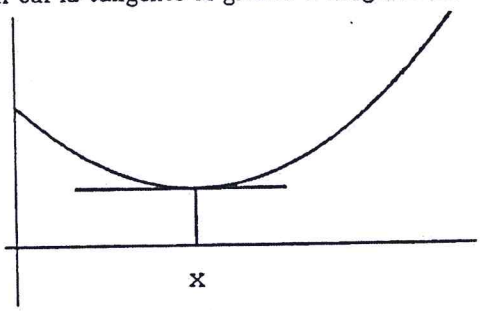



Figura 1

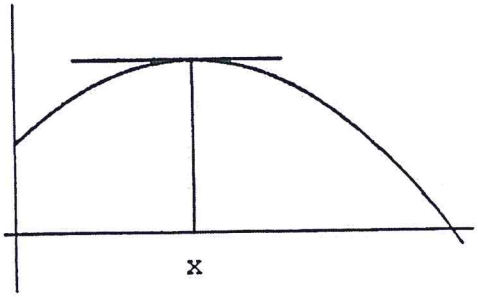



Figura 2

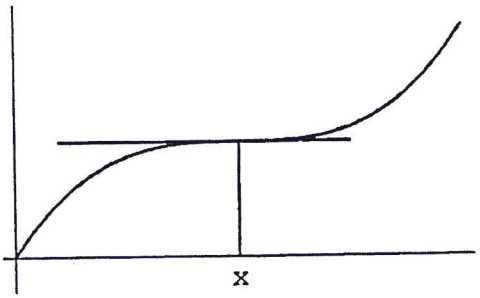



Figura 3

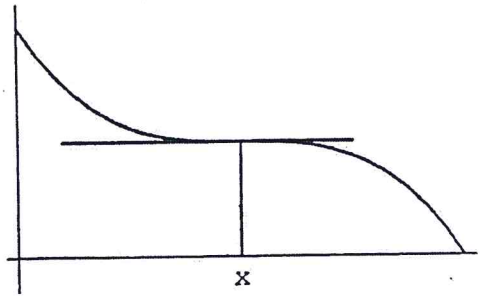



Figura 4

Nei primi due siamo in presenza di un massimo ed un minimo rispettivamente. Nel terzo e nel quarto si dice che la funzione ha un flesso ( orizzontale ).

Quindi per cercare i massimi ed i minimi di una funzione occorre innanzitutto cercare i punti in cui la derivata si annulla. Per saper se si è effettivamente in presenza di un massimo o un minimo occorre analizzare il comportamento della derivata nell'intorno di tali punti. Ad esempio in un punto di massimo la funzione è crescente a sinistra del punto e decrescente a destra, quindi la derivata deve essere positiva a sinistra del punto e negativa a destra. I casi possibili sono i seguenti:

| | $x < x_0$ | $x_0$ | $x > x_0$ | |
|---|---|---|---|---|
| derivata | + | 0 | − | massimo |
| derivata | − | 0 | + | minimo |
| derivata | + | 0 | + | flesso |
| derivata | − | 0 | − | flesso |

Si badi che i punti di massimo e minimo vanno intesi come massimi e minimi locali della funzione, in quanto sono stati analizzati considerando la funzione in un piccolo intorno dei punti in cui la derivata era nulla.

Es.1 Una funzione si dice *pari* se $f(-x) = f(x)$, *dispari* se $f(-x) = -f(x)$. Spreste dimostrare che una funzione pari derivabile ha nell'origine un massimo o un minimo locale?

Es.2 Considerate un polinomio di terzo grado:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Questo polinomio ammette una o tre radici reali a seconda del valore dei coefficienti. Per decidere fra le due alternative si può disegnare un grafico di $P(x)$ e verificare se ha una o tre intersezioni con l'asse delle ascisse. Per quale regione dei parametri il polinomio ammette tre radici reali?

Es.3 Una particella si muove con una legge oraria del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Per quali valori del tempo è massimo o minimo il valore di $x$?. Stessa domanda per la velocità.